



Développement d'une méthode de pénalisation volumique en lattice Boltzmann : application aux domaines mobiles

Malek Benamour

► To cite this version:

Malek Benamour. Développement d'une méthode de pénalisation volumique en lattice Boltzmann : application aux domaines mobiles. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Université de La Rochelle, 2015. Français. NNT : 2015LAROS017 . tel-01373446

HAL Id: tel-01373446

<https://theses.hal.science/tel-01373446>

Submitted on 28 Sep 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UNIVERSITÉ DE LA ROCHELLE

École Doctorale **S**ciences et **I**ngénierie en **M**atériaux, **M**écanique, **É**nergétique et
Aéronautique (SI-MMEA)

Laboratoire des **S**ciences de l'**I**ngénieur pour l'**E**nvironnement (LaSIE)

THÈSE

présentée par :

Malek BENAMOUR

pour obtenir le grade de Docteur de l'Université de La Rochelle

Discipline : Mécanique des fluides

Développement d'une méthode de pénalisation volumique en lattice Boltzmann : Application aux domaines mobiles

Soutenue le 17/10/2015

Thèse dirigée par Claudine BEGHEIN & Erwan LIBERGE

Jury :

M. Aziz HAMDOUNI	Professeur, Université de La Rochelle	Président du jury
M. Jacek POZORSKI	Professeur, Polish Academy of Sciences	Rapporteur
M. Mhamed SOULI	Professeur, Université de Lille	Rapporteur
M. François DUBOIS	Professeur, CNAM Paris et Univ.Paris Sud	Examinateur
Mme. Claudine BEGHEIN	MCF HDR, Université de La Rochelle	Examinateur
M. Erwan LIBERGE	MCF, Université de La Rochelle	Examinateur

Développement d'une méthode de pénalisation volumique en lattice Boltzmann : Application aux domaines mobiles

Résumé

Les écoulements autour de structures en mouvement font l'objet de plusieurs travaux numériques et expérimentaux. L'objectif de ce travail de thèse consiste à montrer la pertinence de la combinaison de la pénalisation volumique avec la méthode de lattice Boltzmann (LBM), dans l'étude du mouvement d'obstacles mobiles dans un écoulement, et de leur interaction avec celui-ci. La LBM, qui est simple et précise à mettre en œuvre, a prouvé ces dernières années son efficacité dans le domaine de la mécanique des fluides. Par ailleurs, la méthode de pénalisation volumique consiste à introduire un terme de pénalisation dans l'équation que l'on souhaite résoudre, afin de prendre en compte l'influence de l'obstacle sur le domaine fluide. Comme cette équation est résolue sur l'ensemble du domaine composé du fluide et du solide, les conditions aux limites à l'interface fluide-solide sont appliquées de façon naturelle. Il semble donc aisé de combiner cette technique avec la méthode de lattice Boltzmann.

Nous avons dans un premier temps rappelé les notions de base et les principales caractéristiques de la méthode de lattice Boltzmann. On a présenté quelques exemples d'applications sur des cas tests, que nous avons programmés. Ensuite, une étude bibliographique faisant état des différentes approches qui utilisent la LBM dans l'étude des problèmes d'interaction fluide structure (IFS) a été réalisée. Puis, la combinaison de la pénalisation volumique avec la LBM a été testée avec succès sur l'équation de Burgers monodimensionnelle. La validation s'est portée en premier lieu, sur un écoulement autour d'un solide fixe, puis sur un écoulement autour d'une structure dont le mouvement est imposé, et finalement sur un problème d'IFS de type masse-ressort. La méthode développée a été ensuite testée sur les équations de Navier-Stokes, en considérant un fluide incompressible et une structure rigide. La validation s'est portée tout d'abord sur un écoulement autour d'obstacles immobiles (carré et cylindre), puis autour d'un cylindre mobile en oscillations forcées et libres. Enfin, une dernière application a été portée sur un écoulement entre deux plaques mobiles dans un canal. Nous avons montré que pour tous les cas étudiés, l'approche développée donne de bons résultats, elle reproduit avec précision les résultats de référence.

Mots clefs : Lattice Boltzmann, Pénalisation volumique, Interaction fluide structure, CFD.

A combined Volume Penalization – Lattice Boltzmann Method for simulating flows around moving bodies

Abstract

Flows around moving bodies are the subject of several numerical and experimental studies. The work presented in this document deals with the implementation of a volume penalization technique in a lattice Boltzmann model (LBM), in order to compute flows around moving obstacles. The LBM, which is accurate and easy to implement, has been successfully applied in fluid mechanics during the last decades. It was thus chosen in the present work, for flow computation. Furthermore, the volume penalization technique consists in introducing a volume penalization term into the equation that needs to be solved, in order to take into account the influence of the obstacle on the fluid domain. Since this equation is solved on both fluid and solid domains, the boundary conditions at the fluid-solid interface are naturally applied. Hence this technique seems easy to implement in a lattice Boltzmann framework.

In the first chapter, the foundations and the main features of the lattice Boltzmann method are recalled, and several test cases that we simulated are presented. The second chapter deals with a literature review of the techniques developed for the simulation of fluid structure interaction problems in combination with the LBM. In the third chapter, the volume penalization method combined with the LBM was first applied to the one dimensional Burgers equation, considering motionless and moving obstacles (forced motion, and coupling between the fluid force calculated with the penalized Burgers equation and the motion of the obstacle). The combination of the volume penalization approach and the LBM was then employed to solve the incompressible Navier Stokes equations, for cases of flows past motionless obstacles (flows over a square obstacle, and past a circular cylinder), and past an oscillating cylinder (where forced and free oscillations of the cylinder were simulated). Finally, this method was also applied to a symmetric Couette flow. For all these simulated cases, a good agreement with numerical results obtained with other techniques, and with results found in literature, was obtained.

Keywords : Lattice Boltzmann, volume penalization, fluid structure interaction, CFD.

*À mes chers parents pour tous leurs sacrifices consentis à mon égard,
À ma chère épouse toujours présente à mes côtés,
À mes frères et sœurs qui m'ont toujours soutenu,
À toute ma famille...*

Remerciements

Ce travail de recherche a été effectué au sein de laboratoire des sciences de l'ingénieur pour l'Environnement (LaSIE). Quelques lignes ne pourront jamais exprimer la reconnaissance que j'éprouve envers tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué par leurs conseils, leurs encouragements ou leur amitié à l'aboutissement de cette thèse. Je remercie monsieur Karim AÏT-MOKHTAR directeur de laboratoire, pour m'avoir accueilli et avoir permis que ce travail se déroule dans les meilleures conditions.

Je tiens à remercier chaleureusement mes deux directeurs de thèse, qui méritent un long paragraphe de remerciements, tout d'abord Claudine BEGHEIN, qui m'a témoigné son soutien et sa confiance, elle a su me faire bénéficier de son expérience. Je la remercie pour la qualité de son encadrement, et pour sa constante disponibilité, qu'elle trouve ici l'expression de mes sincères gratitudes. Ensuite, je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Erwan LIBERGE, pour son aide et son soutien, pour ses judicieux conseils, et de m'avoir suivi avec beaucoup de rigueur durant la réalisation de ce travail. C'est grâce aux qualités scientifiques et humaines de Claudine et Erwan que ce travail a pu être accompli. Merci encore une fois.

Je remercie M. Jacek POZORSKI, Professeur à la Polish Academy of Sciences et M. Mhamed SOULI, Professeur à l'université de Lille pour avoir accepté de rapporter mon travail. Je remercie M. François DUBOIS, Professeur au CNAM de Paris et M. Aziz HAMDOUNI, Professeur à l'université de La Rochelle, pour avoir accepté d'examiner et de juger ce travail de thèse.

Je tiens à remercier également monsieur Michael BREUER et monsieur Cyrille ALLERY pour les résultats qui m'ont permis de valider notre approche sur les écoulements autour d'une structure carrée immobile et sur la cavité entraînée. Je n'oublierai pas monsieur Dominique D'HUMIERES pour ses conseils, lors de l'école de Mécanique des Fluides Numérique à l'île de Porquerolles, qui m'ont été très bénéfiques. J'adresse mes sincères remerciements encore une fois à monsieur Aziz HAMDOUNI en tant que responsable de l'axe AB, pour ces orientations et ses conseils au cours de ces années de thèse. Je remercie tout particulièrement monsieur Rafik BELARBI pour son soutien et ses encouragements.

Une pensée particulière à mes collègues avec qui j'ai partagé des moments inoubliables, je pense notamment à : Y. Ferroukhi, N. Issaadi, R. Cherif, A. Benabed, M. Oulghelou, R. Djedjig, S. Ouldboukhitine, K. Abahri, A. Younsi, A. Hamami, K. Abdelli, et A. Kenai. Je remercie tous les membres successifs du bureau 150A : A. Tallet qui m'a fait visiter le laboratoire pour la première fois, N. Akkari, M. Rahmeh, K. Namouniara, L. Oksri Nelfia, J.L. Bouvier, R. El Sawalhi et enfin I. Jauhari Maknun. Je n'oublie pas non plus les autres doctorants : L. Cadet, A. Deeb, R. Lapisa, Z. Romani, V. Freysz, S. Chardon, T. Sanchez, I. Abdul-Rahman, P. Nguyen, H. Assoum, les deux Adriens Gros et Dhalluin, A. Dumon et V. Basecq... à tous ceux que je n'ai pas cités . . . merci.

Mes remerciements très vifs à toute ma famille, pour son soutien et ses encouragements durant

ces années de thèse.

Enfin, les tous derniers mots de ce manuscrit iront à ma chère femme, je n'oublierai pas son rôle qui a été capital tout au long de ces années. Merci encore une fois.

A vous tous, Merci...

Table des matières

Résumé	iii
Abstract	v
Remerciements	vii
Liste des tableaux	xi
Table des figures	xv
Introduction générale	1
1 Généralités sur la méthode de lattice Boltzmann	3
1.1 Introduction	4
1.2 Présentation de la méthode de lattice Boltzmann	4
1.2.1 Équation de Boltzmann	4
1.2.2 Discrétisation	5
1.2.3 Processus de Collision - Propagation	5
1.2.4 Modèle <i>D2Q9</i>	6
1.2.5 Conversion des unités physiques en unités lattice	7
1.2.5.1 Exemple d'application	7
1.2.6 Stabilité numérique de la LBM	8
1.2.7 Différences entre LBM et CFD	9
1.3 De lattice Boltzmann à Navier-Stokes : le développement de Chapman-Enskog	9
1.4 Conditions aux limites en LBM	10
1.4.1 Conditions périodiques	10
1.4.2 Conditions de symétrie	11
1.4.3 Conditions de paroi	11
1.4.4 Conditions d'entrée et sortie	12
1.5 Raffinement du maillage en LBM	14
1.6 Quelques applications de la LBM	15
1.6.1 Application sur l'équation de diffusion 1D	15
1.6.2 Validation sur l'équation d'advection-diffusion 2D	16
1.6.3 Validation sur un écoulement de Poiseuille 2D	17
1.6.4 Validation sur la cavité entraînée 2D	20
1.7 Conclusion du chapitre	22

2	État de l'art sur l'utilisation de la LBM en interaction fluide-structure	23
2.1	Introduction	24
2.2	Méthode du bounce back	24
2.3	Méthode "Immersed moving boundary"	31
2.4	Méthode des frontières immergées	32
2.4.1	Équations relatives à la méthode des frontières immergées	33
2.4.2	Méthode des frontières immergées combinée avec la LBM	36
2.4.2.1	Méthode classique de Peskin combinée avec la LBM	36
2.4.2.2	Méthode "direct forcing" appliquée à la LBM	38
2.4.2.3	Méthode "momentum exchange" appliquée à la technique des frontières immergées	41
2.4.2.4	Méthode avec correction de vitesse	42
2.5	Méthode des Multiplicateurs de Lagrange	46
2.6	Méthode ALE (<i>Arbitrary Lagrangian Eulerian</i>)	50
2.7	Conclusion du chapitre	53
3	Pénalisation volumique appliquée à l'équation de Burgers	55
3.1	Introduction	56
3.2	Résolution de l'équation de Burgers avec le modèle lattice Boltzmann de Shi & Guo [72]	56
3.2.1	Présentation du modèle de Shi & Guo [72]	56
3.2.2	Résolution de l'équation de Burgers monodimensionnelle	58
3.2.2.1	Problème étudié	58
3.2.2.2	Résultats	59
3.3	Pénalisation volumique appliquée à l'équation de Burgers	60
3.3.1	Formulation du problème	60
3.3.2	Cas d'un domaine solide immobile	61
3.3.2.1	Algorithme du schéma utilisé	61
3.3.2.2	Résultats	62
3.3.3	Cas d'un domaine solide avec un mouvement imposé	63
3.3.3.1	Problème étudié	63
3.3.3.2	Résultats	64
3.3.4	Couplage entre la force calculée avec l'équation de Burgers pénalisée, et le mouvement du solide	64
3.3.4.1	Problème étudié	64
3.3.4.2	Modèle de couplage utilisé	66
3.3.4.3	Résultats obtenus	67
3.4	Conclusion du chapitre	68
4	Écoulement autour d'un solide avec la pénalisation volumique et la LBM	69
4.1	Introduction	70
4.2	Pénalisation volumique appliquée aux équations de Navier-Stokes	70
4.3	Applications et validation	72
4.3.1	Caractérisation des grandeurs physiques étudiées	72
4.3.2	Condition d'incompressibilité	73

4.3.3	Convergence des calculs	73
4.3.4	Écoulement autour d'un obstacle carré immobile	73
4.3.4.1	Présentation du domaine d'étude	73
4.3.4.2	Discussion et validation des résultats	74
4.3.5	Écoulement autour d'un obstacle circulaire immobile	85
4.3.5.1	Présentation du domaine d'étude	85
4.3.5.2	Discussion et validation des résultats	85
4.3.6	Écoulement autour d'un obstacle circulaire mobile	91
4.3.6.1	Adimensionalisation de la structure	91
4.3.6.2	Cylindre en oscillation forcée	92
4.3.7	Cylindre en oscillation libre	93
4.3.8	Écoulement entre deux plaques mobiles dans un canal	94
4.3.8.1	Rappel sur le modèle MRT	95
4.3.8.2	Discussion et validation des résultats	96
4.4	Conclusion du chapitre	99
Conclusions générales et perspectives		101
ANNEXES		103
ANNEXE A		105
ANNEXE B		111
ANNEXE C		113
ANNEXE D		119
Bibliographie		123

Table des figures

1.1	Disposition des vitesses lattices, et des fonctions de distribution, modèle $D2Q9$.	6
1.2	Fonctions de distribution connues et inconnues aux limites d'un domaine d'étude, modèle $D2Q9$	10
1.3	Représentation d'une frontière solide dans un fluide.	11
1.4	Disposition des grilles dans l'approche du raffinement Multi-bloc (Extraite de Lagrava et al.[26]).	14
1.5	Comparaison du champ de vitesse reconstruit à différents instants t obtenus par : – Solution analytique et + LBM avec un raffinement.	16
1.6	Schéma du problème étudié	17
1.7	Comparaison des profils de température à différents instants t	18
1.8	Comparaison des vitesses	19
1.9	Comparaison des pressions	19
1.10	Champ de vitesse u sur un maillage contenant plusieurs raffinement.	20
1.11	Profil de vitesse horizontale u , sur un maillage contenant plusieurs raffinement. .	20
1.12	Géométrie de la cavité entraînée 2D	21
1.13	Comparaison des profils de vitesses avec les résultats de Ghia et al. pour $Re = 100$ et $Re = 1000$	22
2.1	Représentation par Ladd d'une interface fluide-particule. Les nœuds de la frontière sont représentés par des carrés et les nœuds du maillage par des cercles. [34, 31]	25
2.2	Représentation d'une frontière solide dans un fluide [35, 5].	27
2.3	Représentation d'une frontière solide dans un fluide, pour l'application du bounce- back de Yin et Zhang [19].	30
2.4	Positionnement d'une particule solide par rapport à un volume de contrôle (mé- thode "immersed moving boundary" [33]).	32
2.5	Représentation d'une frontière immergée dans un fluide	34
2.6	Représentation graphique de l'approximation de la fonction de Dirac (ϕ_1 : voir équation 2.43, ϕ_2 : voir équation 2.44, ϕ_3 : voir équation 2.45).	36
2.7	Déplacement des points de référence sur la frontière d'un solide.	37
2.8	Domaines lagrangien et eulérien dans la méthode des frontières immergées. . . .	38
2.9	Illustration de l'interpolation linéaire entre la vitesse sur les points de la frontière immergée, et la vitesse dans le fluide (Dupuis et al. [49])	40
2.10	Domaines lagrangien et eulérien dans la méthode des frontières immergées	43

2.11	Pénétration des lignes de courant à l'intérieur du solide : (a) Méthode des frontières immergées conventionnelle (Feng et Michaelides [53]), (b) Méthode des frontières immergées avec correction de vitesse (Wu et Shu [57])	45
2.12	Représentation des domaines fluide et solide, dans la méthode des domaines fictifs (cas bidimensionnel)[60]	47
2.13	Domaine initial, domaine spatial, domaine arbitraire, dans l'approche ALE [62] .	50
3.1	Conditions aux limites pour le modèle $D1Q3$, équation de Burgers.	59
3.2	Comparaison du champ de vitesse obtenus à différents instants t par : - Solution analytique + LBM modèle de Shi & Guo	59
3.3	Description du domaine d'étude	60
3.4	Comparaison du champ de vitesse u obtenu à différents instants t par : - Solution analytique + Pénalisation volumique combinée avec la LBM	62
3.5	Comparaison du champ de vitesse obtenu à différents instants t par : - Pénalisation volumique combinée avec les différences finies + Pénalisation volumique combinée avec la LBM	65
3.6	Description du domaine d'étude d'interaction fluide-structure	65
3.7	Algorithme du modèle de couplage d'interaction fluide-structure utilisé	66
3.8	Position de l'interface, en fonction du temps : - Pénalisation volumique combinée avec la LBM, + Pénalisation volumique combinée avec la méthode des différences finies. a) $k=39.5$ N/m, b) $k=0.395$ N/m	67
3.9	Vitesse de l'interface à $t = 1s$: - Pénalisation volumique combinée avec la LBM, + Pénalisation volumique combinée avec la méthode des différences finies. a) $k=39.5$ N/m, b) $k=0.395$ N/m	68
4.1	Domaine d'étude, pour un écoulement autour d'une structure carrée	74
4.2	Lignes de courant superposées sur les isovaleurs du module de vitesse, écoulement calculé autour d'un obstacle carré avec la pénalisation volumique, $Re=1$	75
4.3	Lignes de courant superposées sur les isovaleurs du module de vitesse, écoulement calculé autour d'un obstacle carré avec la pénalisation volumique a) $Re=40$, b) $Re=100$	75
4.4	Lignes de courant superposées sur les isovaleurs du module de vitesse, écoulement calculé autour d'un obstacle carré avec la pénalisation volumique	76
4.5	Comparaison de la longueur L_r sur la grille 2000×320 . SP : sans pénalisation (bounce back de Zou et He) et LBM, AP : avec pénalisation et LBM.	77
4.6	Comparaison de la longueur L_r sur la grille 3000×480 . SP : sans pénalisation (bounce back de Zou et He) et LBM, AP : avec pénalisation et LBM.	77
4.7	Résultats relatifs au C_d sur la grille 2000×320	78
4.8	Comparaison des ΔC_d	79
4.9	Évolution temporelle de C_l à différents Re , LBM avec pénalisation	80
4.10	Comparaison des ΔC_l sur la grille 2000×320	80
4.11	Comparaison des ΔC_l sur la grille 3000×480	81
4.12	Comparaison de " St " obtenus avec la pénalisation volumique et la LBM, avec les résultats FVM de Breuer	81

4.13 Comparaison de " St " obtenus avec la pénalisation volumique et la LBM, avec les résultats LBM de Breuer	82
4.14 Comparaison de u_x à $Re = 40$ sur la grille 3000×480	83
4.15 Profils de vitesse longitudinale dans des plans perpendiculaires à la direction de l'écoulement obtenus à $t = 666,67s$, $Re = 100$	84
4.16 Profils de vitesse longitudinale, à mi-hauteur du canal, dans la direction de l'écoulement, obtenus à $t = 666,67s$, $Re = 100$	84
4.17 Comparaison de l'énergie cinétique à $Re = 20$ et 40 , grille 3000×480	84
4.18 Domaine d'étude, pour un écoulement autour d'une structure circulaire immobile	85
4.19 Champs de vitesse obtenus avec la LBM et la pénalisation volumique, pour différentes valeurs du nombre de Reynolds	86
4.20 Lignes de courant superposées sur les isovaleurs du module de vitesse, écoulement calculé autour d'un obstacle circulaire avec la pénalisation volumique	86
4.21 Évolution temporelle du coefficient de traînée C_d à $Re = 100$, méthode de la pénalisation volumique combinée avec la LBM	87
4.22 Évolution temporelle du C_l pour différents nombres de Reynolds, LBM avec la pénalisation	88
4.23 Profils de vitesse longitudinale, à mi-hauteur, le long du canal, pour un nombre de Reynolds égal à 100 , à l'instant $t = 428,32s$. Calculs effectués avec la LBM et la pénalisation volumique, et avec la LBM et le bounce back quadratique.	90
4.24 Profils de vitesse longitudinale dans des plans perpendiculaires à la direction de l'écoulement obtenus à $t = 428,32s$, pour un nombre de Reynolds égal à 100 . Calculs effectués avec la LBM et la pénalisation volumique, et avec la LBM et le bounce back quadratique.	90
4.25 Evolution temporelle de l'énergie cinétique, pour un nombre de Reynolds égal à 100 . Calculs effectués avec la LBM et la pénalisation volumique, et avec la LBM et le bounce back quadratique.	90
4.26 Schématisation de la configuration étudiée	91
4.27 Comparaison des champs de vitesse adimensionnés obtenus par a) LBM et b) Code_saturne	92
4.28 Comparaison du coefficient de portance C_L obtenu par – CFD et • LBM	93
4.29 Comparaison de la position du centre de gravité obtenu – CFD et • LBM	94
4.30 Représentation du domaine d'étude.	94
4.31 Vitesse horizontale (u/u_w) pour l'écoulement de Couette à ($x = 100lu$) (a) (Lu et al) modèle BGK, (b) (Lu et al) modèle MRT.	96
4.32 Vitesse horizontale (u/u_w) pour l'écoulement de Couette à ($x = 0.5L$) (a) (Farnoush & Manzari) direct forcing avec modèle BGK, (b) (Farnoush & Manzari) direct forcing avec modèle MRT, (c) (Farnoush & Manzari) Immersed Moving Boundary.	97
4.33 Vitesse horizontale (u/u_w) à ($x = 0.5L$). Pénalisation LBM-BGK.	98
4.34 Vitesse horizontale (u/u_w) à ($x = 0.5L$). Pénalisation LBM-MRT.	98

Liste des tableaux

1.1	Erreur relative en vitesse à différents instants t	16
3.1	Erreur relative en vitesse à différents instants t	60
3.2	Erreur relative E_r en vitesse à différents instants t , domaine solide fixe	63
4.1	Erreur relative (%) sur L_r par rapport à la formule 4.15	77
4.2	Erreur absolue sur L_r par rapport à la formule 4.15	78
4.3	Erreur relative (%) sur le C_d	79
4.4	Erreur absolue sur le C_d	79
4.5	Erreur relative (%) sur le St par rapport aux résultats FVM de Breuer	82
4.6	Erreur relative (%) sur le St par rapport aux résultats LBM de Breuer	83
4.7	Comparaison de la longueur de recirculation L_r	87
4.8	Comparaison de C_d à $Re = 20$ et 40	88
4.9	Comparaison de C_{d-moy} à $Re = 100$	88
4.10	Comparaison de $(Cl_{max} - Cl_{min})_{av}/2$ à $Re = 100$	89
4.11	Comparaison de St à $Re = 100$	89
4.12	Comparaison des coefficients de portance et de trainée	93

Nomenclature

Abréviations

ALE :	<i>Arbitrary Lagrangian Eulerian</i>
BGK :	Bhatnagar Gross Krook
CFD :	<i>Computational Fluid Dynamics</i>
DnQm :	Modèle n dimensions à m vitesses discrètes
FDM :	Méthode des Différences Finies
FVM :	Méthode des Volumes Finies
IFS :	Interaction Fluide Structure
LBE :	<i>Lattice Boltzmann Equation</i>
LBM :	<i>Lattice Boltzmann Method</i>
LGA :	<i>Lattice Gaz Automata</i>
Lu	Unité lattice (lattice unit)
MRT :	Temps de relaxation multiples
NS :	Navier-Stokes
SRT :	<i>Single Relaxation Time</i>

Nombres Adimensionnels

Kn :	Nombre de Knudsen
Ma :	Nombre de Mach
Re :	Nombre de Reynolds
CFL :	Nombre de Courant Friedrichs Lewy
C_d :	Coefficient de traînée
C_l :	Coefficient de portance
St :	Nombre de Strouhal
$C_{l_{rms}}$	Moyenne quadratique du coefficient de portance
$C_{l_{max}}$	Valeur maximale du coefficient de portance
Q^*	Quantité ou valeur adimensionnée

Nomenclature Latine

\mathbf{x} :	Vecteur position
x, y :	Coordonnées cartésiennes
\mathbf{u} :	Vecteur vitesse
u, v :	Composantes 2D vecteur vitesse du fluide
$f(\mathbf{x}, t)$:	Fonction de distribution
$f_{eq}(\mathbf{x}, t)$:	Fonction de distribution à l'équilibre
$f_{neq}(\mathbf{x}, t)$:	Fonction de distribution non équilibre
$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$:	Force exercée par la frontière immergée sur le fluide
f :	Fréquence du détachement tourbillonnaire
F_x :	Force de traînée
F_y :	Force de portance
$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$:	Force externe
$p(\mathbf{x}, t)$:	Pression du fluide
$T(\mathbf{x}, t)$:	Température
$\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)$:	Moment du premier ordre en ξ_α
$\mathbf{X}(s, t)$:	Cordonnées d'un nœud lagrangien
$\mathbf{X}^r(s, t)$:	Position de référence d'un nœud lagrangien
$\mathbf{u}(\mathbf{X}(s, t))$:	Vitesse d'un nœud lagrangien
$\mathbf{m}_\alpha(\mathbf{x}, t)$:	Moment α des fonctions de distribution
$\mathbf{m}_\alpha^{eq}(\mathbf{x}, t)$:	Moment α à l'équilibre
I :	Tenseur identité
$R(t)$:	Matrice de rotation
S :	Matrice de relaxation à l'équilibre
\mathbf{R} :	Moment du troisième ordre
\mathbf{n} :	Vecteur normal unitaire
Q :	Quantité physique
\tilde{Q} :	Quantité lattice
C_Q :	Facteur de conversion
L :	Longueur
H :	Hauteur
l :	Libre parcours moyen
L_r :	Longueur de recirculation
R :	Constante du gaz parfait
m :	Masse
c_s :	Vitesse du son dans le réseau
D :	Dimension d'un espace
k :	Raideur du ressort
X_0 :	Position à l'équilibre du ressort
E_r :	Erreur relative en norme \mathbf{L}^2

Nomenclature Grecque

$\alpha :$	Direction lattice
$\xi_\alpha :$	Vitesse lattice
$\tau :$	Temps de relaxation
$\nu :$	Viscosité cinématique du fluide
ρ	Masse volumique (densité)
$\Omega :$	Opérateur de collision
$\delta :$	Symbole de Kronecker
$\sigma :$	Tenseur des contraintes visqueuses
$\mu :$	Viscosité dynamique du fluide
$\eta :$	Paramètre de pénalisation
$\chi_i :$	Fonction masque
ω_α	Coefficients de pondération
$\Pi(\boldsymbol{x}, t)$	Moment du deuxième ordre
Δt	Pas de temps
Δx	Pas d'espace
Γ	Frontière immergée
γ	Coefficient de diffusion
χ	Facteur de pondération
ϵ_s	Fraction volumique
$\lambda(\boldsymbol{x}, t)$	Multiplicateur de Lagrange sur le maillage cartésien
$\lambda(\boldsymbol{x}_{s_l}, t)$	Multiplicateur de Lagrange sur le maillage du solide

Introduction générale

De nos jours, des efforts importants sont réalisés pour lutter contre les problèmes de diminution des énergies fossiles et du réchauffement climatique. Un grand nombre de secteurs industriels sont concernés, comme le domaine des énergies renouvelables, l'industrie aéronautique, l'industrie navale, l'industrie automobile, etc. Pour réaliser des économies d'énergie, une étape importante dans la conception amont d'un avion, d'une voiture, d'un navire, etc. est d'optimiser leurs performances aérodynamiques (ou aussi hydrodynamiques). Ceci peut se faire avec des expérimentations ou de la simulation numérique. Les expérimentations peuvent être coûteuses à mettre en œuvre, et elles ne permettent pas d'accéder à des informations aussi variées que celles obtenues avec la simulation numérique. La voie numérique est donc un outil de plus en plus utilisé pour réaliser cette étape.

Les phénomènes rencontrés lorsqu'on modélise un écoulement autour d'une structure en mouvement sont complexes, et ont lieu à des échelles de temps et d'espace variées. Grâce aux performances accrues des moyens de calcul actuels, on arrive petit à petit à simuler de façon détaillée de tels écoulements. Dans ce travail nous nous intéresserons à des écoulements incompressibles ou faiblement compressibles.

La résolution des équations de Navier-Stokes par des méthodes numériques conventionnelles (différences finies, volumes finis, éléments finis, ...) n'est pas aisée car on doit entre autres, discrétiser l'opérateur d'advection qui est non linéaire, et trouver un moyen de coupler la vitesse et la pression (Ferziger & Peric (2002) [1], Versteeg & Malalasekera [2]). Depuis un peu moins de trente ans, une autre méthode a été développée pour résoudre les équations de Navier-Stokes. La méthode de lattice Boltzmann avec laquelle on résout l'équation de Boltzmann discrète, à une échelle mésoscopique (intermédiaire entre l'échelle microscopique et l'échelle macroscopique), suscite un intérêt grandissant. Avec cette méthode, l'opérateur d'advection est linéaire, la pression est calculée grâce à une équation d'état, et elle est résolue localement (Chen & Doolen (1998) [3], Succi (2001) [4], Yu et al. (2003) [5], Aidun & Clausen (2010) [6]). Elle est donc relativement simple à programmer, et elle est facilement parallélisable. C'est cette méthode que nous avons choisie dans le cadre de cette thèse pour résoudre numériquement des écoulements incompressibles autour de solides indéformables en mouvement. Nous nous intéressons à des écoulements isothermes et non turbulents. De plus, notre choix s'est porté sur la méthode de la pénalisation volumique pour calculer les écoulements autour d'obstacles en mouvement. En effet, comme avec cette méthode, on résout une équation unique sur le domaine fluide et sur le domaine solide, la programmation est assez simple (Arquis & Caltagirone [7], Angot et al [8]).

L'objectif de ce travail de recherche entend montrer la pertinence de la combinaison de la pénalisation volumique avec la méthode de Lattice Boltzmann dans l'étude du mouvement d'obstacles mobiles dans un écoulement, et de leur interaction avec celui-ci.

Ce mémoire de thèse est organisé en quatre parties, à laquelle on ajoutera la conclusion générale :

Dans le premier chapitre (1), nous rappellerons le cadre de base ainsi que les fondements théoriques et les principales caractéristiques de la méthode de lattice Boltzmann. Ensuite, on présentera quelques exemples d'applications sur différents cas tests, que nous avons programmés.

Dans le deuxième chapitre (2), une étude bibliographique détaillée sur les différentes approches et modèles qui utilisent la méthode lattice Boltzmann dans l'étude des problèmes d'interaction fluide-structure (écoulements autour d'obstacles en mouvement), sera présentée. Les avantages et inconvénients de chaque méthode seront décrits.

On valide ensuite dans le troisième chapitre (3), la méthode de la pénalisation volumique à l'équation de Burgers monodimensionnelle. Nous avons choisi cette équation (Burgers) car elle représente un exemple simple d'équation non-linéaire, c'est une équation de convection-diffusion, et elle fait seulement intervenir le champ de vitesse, le terme de pression étant nul. Elle est donc intéressante à étudier, pour analyser le comportement de la pénalisation volumique combinée avec la LBM dans la résolution de problèmes non linéaires. L'application de cette combinaison sera dans un premier temps portée sur un écoulement fluide incompressible en présence d'une structure fixe, ensuite sur une structure mobile avec un mouvement imposé, puis avec un mouvement libre.

Dans le dernier chapitre (4), nous nous intéressons aux équations de Navier-Stokes, sur un domaine bidimensionnel. On continue à tester la capacité ainsi que la fiabilité de notre approche. La validation sera portée dans un premier temps sur un écoulement autour de structures solides immobiles de formes différentes. La présence de l'obstacle est prise en compte avec la méthode de pénalisation volumique, et la résolution sera effectuée avec la méthode de lattice Boltzmann. Notre validation d'interaction fluide structure (IFS) sera portée tout d'abord sur un écoulement autour d'un obstacle circulaire mobile en oscillation forcée, puis en oscillation libre. Le chapitre se termine par une autre validation sur un écoulement entre deux plaques mobiles dans un canal.

Le mémoire de thèse se termine par des conclusions et des perspectives.

Chapitre 1

Généralités sur la méthode de lattice Boltzmann

Sommaire

1.1 Introduction	4
1.2 Présentation de la méthode de lattice Boltzmann	4
1.2.1 Équation de Boltzmann	4
1.2.2 Discrétisation	5
1.2.3 Processus de Collision - Propagation	5
1.2.4 Modèle <i>D2Q9</i>	6
1.2.5 Conversion des unités physiques en unités lattice	7
1.2.5.1 Exemple d'application	7
1.2.6 Stabilité numérique de la LBM	8
1.2.7 Différences entre LBM et CFD	9
1.3 De lattice Boltzmann à Navier-Stokes : le développement de Chapman-Enskog	9
1.4 Conditions aux limites en LBM	10
1.4.1 Conditions périodiques	10
1.4.2 Conditions de symétrie	11
1.4.3 Conditions de paroi	11
1.4.4 Conditions d'entrée et sortie	12
1.5 Raffinement du maillage en LBM	14
1.6 Quelques applications de la LBM	15
1.6.1 Application sur l'équation de diffusion 1D	15
1.6.2 Validation sur l'équation d'advection-diffusion 2D	16
1.6.3 Validation sur un écoulement de Poiseuille 2D	17
1.6.4 Validation sur la cavité entraînée 2D	20
1.7 Conclusion du chapitre	22

1.1 Introduction

La méthode de lattice Boltzmann (LBM) est une approche mésoscopique, utilisée en mécanique comme outil de résolution numérique des équations. Son principe est de résoudre l'équation de Boltzmann sous forme discrétisée à l'échelle mésoscopique afin d'obtenir une solution à l'échelle macroscopique [4]. Historiquement l'approche LBM est développée à partir de la méthode Lattice Gaz Automata (LGA) [9], bien qu'elle puisse être dérivée directement de l'équation simplifiée de Boltzmann [5]. En CFD (Computational Fluid Dynamics) les variables macroscopiques comme la vitesse \mathbf{u} et la pression p , sont directement obtenues par résolution des équations de Navier-Stokes. Par ailleurs, en LBM ces variables macroscopiques peuvent être obtenues à partir des moments hydrodynamiques de la fonction de distribution de particules $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t)$.

La LBM a prouvé son efficacité dans la résolution d'un grand nombre de problèmes de mécanique des fluides tels que les écoulements multiphasiques, les milieux poreux, etc. Elle est précise et assez simple à mettre en œuvre. De plus, la transmission de données est toujours locale ce qui est très avantageux pour les calculs parallèles sur carte graphique. Ceci rend la méthode LBM attractive.

Dans ce chapitre, nous rappellerons les notions générales, la méthodologie ainsi que les fondements théoriques de la méthode LBM. Une partie sera consacrée à la mise en application de cette méthode sur différents cas tests.

1.2 Présentation de la méthode de lattice Boltzmann

1.2.1 Équation de Boltzmann

Boltzmann a proposé une équation intégral-différentielle de la théorie cinétique des gaz pour décrire l'évolution d'un gaz hors état d'équilibre thermodynamique. Il considère qu'un gaz est constitué de particules (atomes, molécules) en interaction qui peuvent être décrites par les lois de la mécanique classique. Du fait du nombre de particules important, un traitement statistique est nécessaire.

L'équation de Boltzmann est donnée par :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{\xi} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\xi}} = \Omega(f) \quad (1.1)$$

Où $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t)$ est la densité de probabilité d'avoir une particule à la position \mathbf{x} , à l'instant t , ayant une vitesse $\boldsymbol{\xi}$. $\Omega(f)$ est l'opérateur de collision entre les particules, \mathbf{F} la force externe, et m la masse de la particule.

Le modèle cinétique le plus adopté dans la littérature, pour modéliser l'opérateur de collision est celui d'un seul temps de relaxation (SRT), dit modèle de Bhatnagar Gross Krook (BGK) [10] donné par :

$$\Omega(f) = -\frac{1}{\tau}(f - f^{eq}) \quad (1.2)$$

Où τ désigne le temps de relaxation à l'équilibre, et f^{eq} la fonction de distribution à l'équilibre dépendant des propriétés hydrodynamiques locales comme la densité ρ et la vitesse \mathbf{u} .

Pour la résolution numérique, l'équation (1.2) est d'abord discrétisée dans l'espace de vitesses

en utilisant un ensemble fini de vecteurs ξ_α , tout en vérifiant les lois de conservation.

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \xi_\alpha \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{x}} + \gamma_\alpha \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \xi_\alpha} = -\frac{1}{\tau}(f_\alpha - f_\alpha^{eq}) \quad (1.3)$$

Où γ_α désigne l'accélération de la particule, α la direction que peut prendre une particule. L'équation (1.3) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{\partial f_\alpha(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \xi_\alpha \cdot \frac{\partial f_\alpha(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} = -\frac{1}{\tau}(f_\alpha(\mathbf{x}, t) - f_\alpha^{eq}(\mathbf{x}, t)) + F_\alpha(\mathbf{x}, t) \quad (1.4)$$

Dans la suite, afin d'alléger les calculs, $F_\alpha(\mathbf{x}, t)$ sera omis du second membre.

1.2.2 Discrétisation

Le membre gauche de l'équation (1.4) représente la dérivée totale de la fonction de distribution $f_\alpha(\mathbf{x}, t)$:

$$\frac{d}{dt} f_\alpha(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{\tau} [f_\alpha(\mathbf{x}, t) - f_\alpha^{eq}(\mathbf{x}, t)] \quad (1.5)$$

L'équation (1.5) peut se mettre sous la forme [11] :

$$\frac{d}{ds} f_\alpha(\mathbf{x} + \xi_\alpha s, t + s) = -\frac{1}{\tau} [f_\alpha(\mathbf{x} + \xi_\alpha s, t + s) - f_\alpha^{eq}(\mathbf{x} + \xi_\alpha s, t + s)] \quad (1.6)$$

Si on intègre l'équation (1.6) pour s compris en 0 et Δt , et si on suppose que l'opérateur de collision est constant pendant un intervalle de temps, on obtient l'équation de lattice Boltzmann (LBE) suivante :

$$f_\alpha(\mathbf{x} + \xi_\alpha \Delta t, t + \Delta t) - f_\alpha(\mathbf{x}, t) \simeq -\frac{\Delta t}{\tau} [f_\alpha(\mathbf{x}, t) - f_\alpha^{eq}(\mathbf{x}, t)] \quad (1.7)$$

1.2.3 Processus de Collision - Propagation

L'équation (1.7) est résolue sur une discrétisation du domaine, cette discrétisation sera appelée réseau. Le domaine est discrétisé par un nombre fini de nœuds appelés lattices. L'évolution du système se fait en deux étapes : la collision et la propagation appelée aussi l'advection. A chaque instant t , et sur chaque site \mathbf{x} , les particules se heurtent avec une vitesse discrète ξ_α (phase de collision) et après, elles s'éparpillent en conservant exactement et localement la masse, la quantité de mouvement et l'énergie, c'est ce qu'on appelle la phase de propagation (ou streaming).

L'équation (1.7) peut être donc résolue en deux étapes :

Collision :

$$\tilde{f}_\alpha(\mathbf{x}, t + \Delta t) = f_\alpha(\mathbf{x}, t) - \frac{\Delta t}{\tau} [f_\alpha(\mathbf{x}, t) - f_\alpha^{eq}(\mathbf{x}, t)] \quad (1.8)$$

Propagation ou streaming :

$$f_\alpha(\mathbf{x} + \xi_\alpha \Delta t, t + \Delta t) = \tilde{f}_\alpha(\mathbf{x}, t + \Delta t) \quad (1.9)$$

La collision (1.8) est locale au nœud \mathbf{x} donné, ce qui rend plus facile la parallélisation des calculs

avec la méthode LBM.

1.2.4 Modèle $D2Q9$

Dans la méthode LBM, la notion de réseaux ou arrangements est importante. Les particules se déplacent entre les nœuds d'un réseau à la vitesse ξ_α , suivant des directions α bien définies. Le modèle $2D$ à neuf vitesses discrètes $D2Q9$ (voir figure 1.1) est largement utilisé dans la littérature pour la simulation des écoulements bidimensionnels [5]. C'est pour cette raison qu'on l'a choisi pour nos simulations 2D.

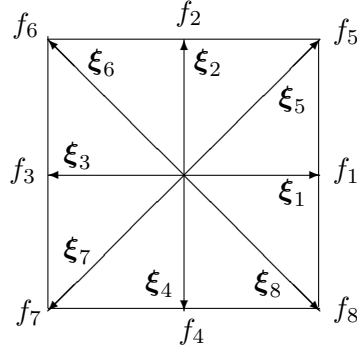


FIGURE 1.1 – Disposition des vitesses lattices, et des fonctions de distribution, modèle $D2Q9$

Ce modèle est caractérisé par des vitesses discrètes $\xi_{\alpha=0,8}$ définies par :

$$\begin{cases} \xi_0 = (0, 0) \\ \xi_\alpha = c (\cos((\alpha - 1)\pi/2), \sin((\alpha - 1)\pi/2)), & \alpha = 1, 2, 3, 4 \\ \xi_\alpha = c\sqrt{2} (\cos((\alpha - 5)\pi/2 + \pi/4), \sin((\alpha - 5)\pi/2 + \pi/4)), & \alpha = 5, 6, 7, 8 \end{cases} \quad (1.10)$$

Où $c = \Delta x / \Delta t$. La fonction de distribution à l'équilibre $f_\alpha^{eq}(\mathbf{x}, t)$ pour ce modèle est donnée par :

$$f_\alpha^{eq} = \omega_\alpha \rho \left(1 + \frac{(\xi_\alpha \cdot \mathbf{u})}{c_s^2} + \frac{\mathbf{u} \mathbf{u} : (\xi_\alpha \xi_\alpha - c_s^2 I)}{2c_s^4} \right) \quad (1.11)$$

Où ω_α désigne les coefficients de pondération donnés par :

$$\omega_\alpha = \begin{cases} 4/9, & \alpha = 0 \\ 1/9, & \alpha = 1, 2, 3, 4 \\ 1/36, & \alpha = 5, 6, 7, 8 \end{cases} \quad (1.12)$$

La densité ρ et la quantité de mouvement $\rho \mathbf{u}$ du fluide sont données par :

$$\begin{aligned} \rho &= \sum_{\alpha=0}^8 f_\alpha(\mathbf{x}, t) = \sum_{\alpha=0}^8 f_\alpha^{eq}(\mathbf{x}, t) \\ \rho \mathbf{u} &= \sum_{\alpha=0}^8 \xi_\alpha f_\alpha(\mathbf{x}, t) = \sum_{\alpha=0}^8 \xi_\alpha f_\alpha^{eq}(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (1.13)$$

La vitesse du son $c_s = c/\sqrt{3}$ représente la vitesse avec laquelle l'information est transmise dans

l'espace discrétisé (réseau lattice). La pression du fluide est obtenue directement à partir de la densité et de la vitesse du son, elle est donnée par :

$$p = \rho c_s^2 \quad (1.14)$$

On rappelle dans l'annexe **D** (4.4) comment on obtient l'expression (1.11).

1.2.5 Conversion des unités physiques en unités lattice

Dans l'application de la méthode LBM, on cherche toujours l'équivalence des quantités physiques simulées en quantités lattice. On explique dans cette partie, comment convertir des unités d'un système physique donné (mètres, kilogrammes, secondes,...) en unités lattice.

Pour chaque quantité physique Q , on peut écrire :

$$Q = \tilde{Q} \times C_Q \quad (1.15)$$

Où \tilde{Q} représente la quantité lattice (discrète), et C_Q désigne le facteur de conversion. On commence toujours par calculer les facteurs de conversion primaires (C_l, C_t, C_ρ), puis on dérive les facteurs de conversion secondaires.

Avant toute autre chose, il faut trouver les nombres sans dimension (Reynolds par exemple) pour un problème donné. Ces nombres sans dimension, devraient être invariants dans les deux systèmes d'unités (physique et lattice), excepté pour le nombre de Mach (Ma). Si on prend l'exemple du nombre de Reynolds on peut écrire que :

$$Re = \tilde{Re} \quad \text{et} \quad C_{Re} = 1 \quad (1.16)$$

En appliquant ces deux règles (équations (1.15) et (1.16)), on peut passer d'un système (physique ou lattice) à un autre. Dans ce qui suit, on illustre l'approche adoptée pour la conversion des unités par un exemple simple.

1.2.5.1 Exemple d'application

On considère un écoulement incompressible de Poiseuille dans un canal de largeur $H = 1 \text{ m}$, le fluide a une viscosité cinématique $\nu = 10^{-2} \text{ m}^2/\text{s}$, et une densité $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$, l'écoulement est généré par une force de gravité $g = 10^3 \text{ m/s}^2$. Avec ces valeurs, on obtient une vitesse maximale $u_m = 1 \text{ m/s}$ et $Re = 100$. On cherche à convertir ces unités physiques en unités lattices.

On choisit un nombre de lattices en largeur $\tilde{H} = 300$, ce qui donne $C_H = 3.33 \times 10^{-3} \text{ m}$. On considère aussi une densité lattice $\tilde{\rho} = 1$, on obtient $C_\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$. Le temps de relaxation suivant $\tau = 0.75$ est choisi.

D'autre part, on sait que :

$$Re = \frac{U_m H}{\nu} \quad \text{et} \quad \tilde{Re} = \frac{\tilde{U}_m \tilde{H}}{\tilde{\nu}} \quad (1.17)$$

On déduit le facteur de conversion de la viscosité C_ν :

$$Re = \tilde{Re} \Rightarrow \frac{\nu}{\tilde{\nu}} = \frac{U_m H}{\tilde{U}_m \tilde{H}} \Rightarrow C_\nu = C_u C_H \quad (1.18)$$

Pour le pas de temps et le pas d'espace lattice on choisit :

$$\tilde{\Delta x} = \tilde{\Delta t} = 1 \Rightarrow \Delta x = C_H \text{ et } \Delta t = C_t \quad (1.19)$$

La viscosité cinématique du fluide est définie par :

$$\tilde{\nu} = c_s^2 \tilde{\Delta t} (\tau - 0.5); \quad c_s^2 = \frac{1}{3} \frac{\tilde{\Delta x}^2}{\tilde{\Delta t}^2} \Rightarrow \tilde{\nu} = \frac{(\tau - 0.5)}{3} \frac{C_H^2}{C_t} \Rightarrow C_t = \frac{(\tau - 0.5)}{3} \frac{C_H^2}{\tilde{\nu}} \quad (1.20)$$

On obtient donc le facteur de conversion du temps C_t donné par :

$$C_t = \frac{\tau - 0.5}{3} \frac{C_H^2}{\tilde{\nu}} = 9.26 \times 10^{-5} \text{ s} \quad (1.21)$$

Connaissant les facteurs de conversion C_H et C_t , on déduit C_u :

$$u = \frac{H}{t} \Rightarrow C_u = \frac{C_H}{C_t} = 1 \text{ m/s} \quad (1.22)$$

On obtient finalement la vitesse u_m en unité lattice :

$$\tilde{u}_m = \frac{u_m}{C_u} \Rightarrow \tilde{u}_m = 0.028 \quad (1.23)$$

Pour vérifier la conversion, on calcule le nombre de Reynolds en unité lattice :

$$\tilde{Re} = \frac{\tilde{u}_m \tilde{H}}{\tilde{\nu}} = 100 \quad (1.24)$$

On constate que le nombre de Reynolds est le même dans les deux systèmes d'unités, la conversion donc est bonne.

1.2.6 Stabilité numérique de la LBM

Une méthode est dite instable si elle est sujette à une propagation importante des erreurs numériques. Les instabilités peuvent se manifester à proximité des zones de discontinuités comme une interface fluide-structure. La première limitation de la méthode LBM concerne la vitesse du fluide \tilde{u} , celle ci ne doit pas dépasser une certaine marge de valeur (utilisation de vitesses faibles), cela est du à l'approximation de la fonction de distribution à l'équilibre $f_\alpha^{eq}(\mathbf{x}, t)$. La condition d'incompressibilité est directement liée au nombre de Mach [12], défini par :

$$Ma = \frac{\|\tilde{u}\|}{c_s} \ll 1 \quad (1.25)$$

La stabilité devrait être automatiquement satisfaite si la condition d'incompressibilité ci-dessus est bien respectée, c'est à dire que la vitesse \tilde{u} doit être suffisamment faible. Si ce n'est pas le cas, on peut avoir des problèmes au niveau de la convergence (par exemple la densité ne converge pas vers une valeur proche de 1 dans tout le domaine de calcul).

Une autre source d'instabilité réside dans le mauvais choix de la viscosité du fluide ν . Le temps de relaxation τ qui est directement lié à la viscosité, varie entre $0.5 < \tau < 2$. Au voisinage de ces deux limites, la méthode LBM devient fortement instable. Pour $\tau < 0.5$ la viscosité du fluide est négative, et lorsque τ est légèrement supérieure à 0.5 il devient très difficile de converger vers une solution. Cette contrainte sur la viscosité représente une restriction pour les simulations d'écoulements à grand nombre de Reynolds.

Ces deux contraintes sur la vitesse $\tilde{\mathbf{u}}$ et la viscosité ν constituent l'inconvénient majeur de la méthode LBM. En effet, si on limite $\tilde{\mathbf{u}} \sim 0.03$ et $0.5 < \tau < 2$, le seul moyen de monter en Reynolds c'est la taille du solide, et donc le nombre de nœuds.

1.2.7 Différences entre LBM et CFD

L'intérêt pratique de la méthode LBM est prouvé par les avantages suivants :

1. L'équation de Navier-Stokes est une équation aux dérivées partielles de deuxième ordre, celle de Boltzmann est de premier ordre, ce qui implique une résolution plus simple.
2. Le solveur Navier-Stokes doit traiter inévitablement le terme convectif non-linéaire $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$, en revanche, le modèle LBM évite totalement ce terme, car la convection devient une simple advection par un décalage uniforme de données par l'étape de propagation.
3. Le solveur Navier-Stokes emploie habituellement des procédures itératives pour obtenir une solution convergée. La LBM est habituellement explicite et elle n'a pas besoin de procédures itératives.
4. Dans les méthodes de discrétisation, la stabilité est satisfaite par le bon choix des pas de temps et d'espace, dans la méthode LBM, le nombre de Courant Friedrichs Lewy (CFL) est égal à 1 ($\Delta x = \Delta t = 1$).

1.3 De lattice Boltzmann à Navier-Stokes : le développement de Chapman-Enskog

Le lien entre les échelles macro et mésoscopique se fait via le développement de Chapman-Enskog. La procédure consiste en un développement perturbatif de la fonction de distribution $f(\mathbf{x}, t)$, autour de l'équilibre thermodynamique local $f(\mathbf{x}, t)^{eq}$.

Un paramètre utilisé dans cette procédure est le nombre de Knudsen Kn , qui caractérise la faculté qu'a le fluide à s'écarter de son état d'équilibre, il est défini par :

$$Kn = \frac{l}{L} \quad (1.26)$$

Où l est le libre parcours moyen, qui représente la distance moyenne parcourue par une particule entre deux collisions. L est la dimension caractéristique de l'écoulement. Pour que le fluide reste proche de l'équilibre il faut que $Kn \ll 1$.

On rappelle dans l'annexe **C** (4.4) comment on passe de l'équation de lattice Boltzmann avec l'approximation BGK aux équations de Navier-Stokes incompressibles en utilisant la procédure de Chapman-Enskog.

1.4 Conditions aux limites en LBM

Dans cette section du chapitre, on s'intéresse à la formulation des conditions aux limites associées à la méthode LBM. Ces conditions sont d'importance primordiale dans la mesure où elles affectent directement la stabilité et la précision de la méthode. Elles sont exprimées en termes de fonctions de distribution $f_\alpha(\mathbf{x}, t)$ plutôt qu'en termes de variables macroscopiques, comme c'est le cas des méthodes de calcul classiques utilisées en CFD.

Dans la littérature on trouve beaucoup de travaux qui se sont intéressés aux conditions aux limites appliquées en LBM, dans notre cas on se limitera juste aux conditions utilisées dans nos simulations.

Pour bien comprendre les différentes conditions aux limites, on montre sur la figure 1.2, quelques conditions qui peuvent avoir lieu pour un écoulement dans un canal avec le modèle $D2Q9$. Les fonctions de distribution $f_\alpha(\mathbf{x}, t)$ qui manquent sur chaque limite, sont présentées en caractère gras.

Les notations N, S, E, W , représentent respectivement la limite Nord, Sud, Est et Ouest du canal.

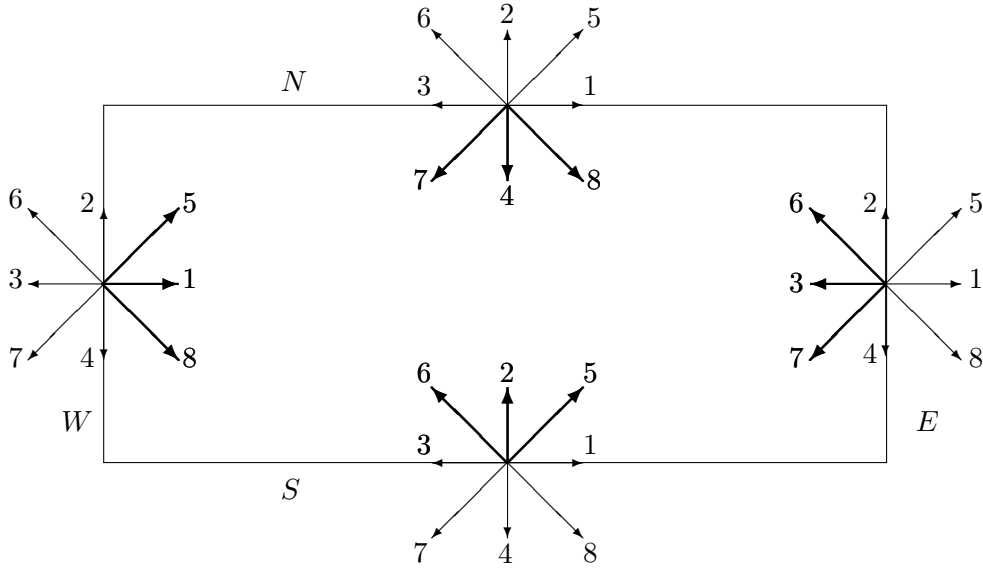


FIGURE 1.2 – Fonctions de distribution connues et inconnues aux limites d'un domaine d'étude, modèle $D2Q9$

1.4.1 Conditions périodiques

Les conditions aux limites périodiques sont des conditions simples à mettre en œuvre. Nous les expliquons ici pour les frontières E, W . Ces conditions vérifient les deux critères suivants :

$$\mathbf{u}(E) = \mathbf{u}(W) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}(E) = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}(W) \quad (1.27)$$

L'idée en LBM est que la fonction de distribution $f_\alpha(\mathbf{x}, t)$ sortante d'une limite (fluide ou solide), rentre sur la frontière opposée. Prenons l'exemple de la limite Est du canal (voir figure 1.2 ci-dessus). Les fonctions $f_{3_W}(\mathbf{x}, t)$, $f_{6_W}(\mathbf{x}, t)$ et $f_{7_W}(\mathbf{x}, t)$ sont connues, car elles proviennent de l'intérieur du canal suite à l'étape de propagation (voir équation (1.9)). Par ailleurs les fonctions $f_{3_E}(\mathbf{x}, t)$, $f_{6_E}(\mathbf{x}, t)$ et $f_{7_E}(\mathbf{x}, t)$ sont inconnues, car si elles avaient été propagées, elles l'auraient

été depuis l'extérieur, ce qui n'est pas possible.

Les conditions périodiques pour ces fonctions inconnues, sont données par [13] :

$$\begin{aligned} f_{3_E}(\mathbf{x}, t) &= f_{3_W}(\mathbf{x}, t), & f_{6_E}(\mathbf{x}, t) &= f_{6_W}(\mathbf{x}, t), & \text{et} & & f_{7_E}(\mathbf{x}, t) &= f_{7_W}(\mathbf{x}, t) \\ f_{1_W}(\mathbf{x}, t) &= f_{1_E}(\mathbf{x}, t), & f_{5_W}(\mathbf{x}, t) &= f_{5_E}(\mathbf{x}, t), & \text{et} & & f_{8_W}(\mathbf{x}, t) &= f_{8_E}(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (1.28)$$

1.4.2 Conditions de symétrie

Pour simuler un écoulement en milieu infini, les conditions aux limites de symétrie sont généralement appliquées. Cette condition implique qu'il n'y ait pas de flux entrant ou sortant au niveau de la frontière, elle est exprimée par :

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial U}{\partial n} = 0 \quad (1.29)$$

Où \mathbf{n} est la normale à la frontière considérée. Si on considère la paroi supérieure du canal (voir 1.2 ci-dessus), les fonctions inconnues sont $f_{4_N}(\mathbf{x}, t)$, $f_{7_N}(\mathbf{x}, t)$ et $f_{8_N}(\mathbf{x}, t)$, les conditions de symétrie pour ces fonctions peuvent être exprimées ainsi :

$$f_{4_N}(\mathbf{x}, t) = f_{2_N}(\mathbf{x}, t), \quad f_{7_N}(\mathbf{x}, t) = f_{6_N}(\mathbf{x}, t) \quad \text{et} \quad f_{8_N}(\mathbf{x}, t) = f_{5_N}(\mathbf{x}, t) \quad (1.30)$$

Les fonctions de distribution $f_{2_N}(\mathbf{x}, t)$, $f_{5_N}(\mathbf{x}, t)$ et $f_{6_N}(\mathbf{x}, t)$ sont considérées connues après l'étape de propagation (elles proviennent de l'intérieur du canal).

1.4.3 Conditions de paroi

Les conditions aux limites en LBM sont d'abord introduites pour les parois solides rectilignes (conditions de paroi) [14]. Les conditions aux limites de bounce-back ou rebond en arrière, sont le plus souvent utilisées, car elles sont précises et faciles à mettre en œuvre [15, 16]. Elles sont largement utilisées dans la simulation des écoulements fluides avec des géométries complexes [17, 18]. Le principe c'est que lorsqu'une particule fluide heurte une paroi solide, sa quantité de mouvement est inversée, autrement dit, la particule rebondit dans le sens inverse de son mouvement [19, 4].

Pour avoir la position exacte de la frontière physique (\mathbf{x}_w) entre le nœud fluide (\mathbf{x}_f) et solide (\mathbf{x}_b), (voir figure 1.3), on définit le paramètre Δ tel que :

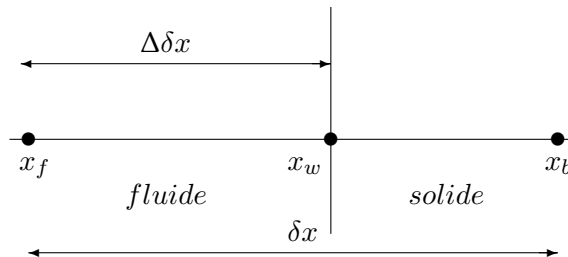


FIGURE 1.3 – Représentation d'une frontière solide dans un fluide.

$$\Delta = \frac{|x_f - x_w|}{|x_f - x_b|}, \quad 0 \leq \Delta \leq 1 \quad (1.31)$$

Pour compléter l'étape de propagation au nœud fluide x_f , on a besoin des fonctions de distribution après collision $\tilde{f}_{\bar{\alpha}}(\mathbf{x}_f)$ inconnues qui viennent du nœud solide x_b . Les conditions de bounce-back pour une paroi solide fixe sont exprimées de la manière suivante :

$$\tilde{f}_{\bar{\alpha}}(\mathbf{x}_b, t) = \tilde{f}_{\alpha}(\mathbf{x}_f, t) \quad (1.32)$$

où $\bar{\alpha}$ désigne la direction opposée à α . Pour avoir plus de précision et satisfaire la condition de non glissement ($\mathbf{u}_w = 0$), la paroi doit être au milieu entre deux nœuds voisins fluide et solide [20, 5, 21].

Ladd (1994)[22] a modifié le bounce-back classique pour prendre en compte le mouvement de la paroi, en ajoutant un terme au deuxième membre de l'équation (1.32) [19] :

$$\tilde{f}_{\bar{\alpha}}(\mathbf{x}_b, t) = \tilde{f}_{\alpha}(\mathbf{x}_f, t) - \frac{2}{c_s^2} \omega_{\alpha} \rho_w \boldsymbol{\xi}_{\alpha} \cdot \mathbf{u}_w \quad (1.33)$$

Où $\boldsymbol{\xi}_{\bar{\alpha}} = \boldsymbol{\xi}_{\alpha}$, ρ_w et \mathbf{u}_w , sont respectivement la densité et la vitesse du fluide à la paroi.

Les conditions aux limites qui traitent les frontières solides courbées, seront présentées dans le chapitre suivant.

1.4.4 Conditions d'entrée et sortie

Zou et He (1997)[23], ont étendu les conditions de bounce-back à la partie non équilibre $f^{neq}(\mathbf{x}, t)$ de la fonction de distribution $f(\mathbf{x}, t)$. Ils considèrent que la paroi physique est placée sur le nœud solide ($\mathbf{x}_w = \mathbf{x}_b$). Les conditions aux limites de Zou & He sont de type Dirichlet, où on spécifie les valeurs que la solution (vitesse ou densité) doit vérifier sur les frontières solides ou fluides et d'en déduire les fonctions de distribution qui manquent.

Prenons le cas de l'entrée d'un écoulement fluide dans un canal (Côté W sur la figure 1.2), où u_x et u_y sont spécifiées. Pour le modèle $D2Q9$ et après l'étape de la propagation, les fonctions de distribution $f_0, f_2, f_3, f_4, f_6, f_7$ sont connues. Il reste à déterminer ρ et f_1, f_5, f_8 , qui sont données par :

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{1-u} [f_0 + f_2 + f_4 + 2(f_3 + f_6 + f_7)] \\ f_1 &= f_3 + \frac{2}{3} \rho u \\ f_5 &= f_7 - \frac{1}{2} (f_2 - f_4) + \frac{1}{2} \rho v + \frac{1}{6} \rho u \\ f_8 &= f_6 + \frac{1}{2} (f_2 - f_4) - \frac{1}{2} \rho v + \frac{1}{6} \rho u \end{aligned} \quad (1.34)$$

Supposons maintenant que c'est la densité qui est spécifiée à l'entrée et que $v = 0$. Après la pro-

pagation, les fonctions de distribution $f_0, f_2, f_3, f_4, f_6, f_7$ sont connues. Il reste qu'à déterminer u_x et f_1, f_5, f_8 .

$$\begin{aligned}
 u &= 1 - [f_0 + f_2 + f_4 + 2(f_3 + f_6 + f_7)]/\rho \\
 f_1 &= f_3 + \frac{2}{3}\rho u \\
 f_5 &= f_7 - \frac{1}{2}(f_2 - f_4) + \frac{1}{6}\rho u \\
 f_8 &= f_6 + \frac{1}{2}(f_2 - f_4) + \frac{1}{6}\rho u
 \end{aligned} \tag{1.35}$$

On remarque bien que le fait de mettre la vitesse nulle ($u = v = 0$), les conditions de Zou & He se réduisent au simple bounce-back. Ces conditions sont difficiles à mettre en œuvre, et nécessitent des traitements supplémentaires sur les coins.

Une autre manière d'avoir les fonctions inconnues est de les extrapoler à partir des fonctions connues des sites adjacents. L'extrapolation est largement utilisée en LBM [17], elle provient de la méthode des différences finies (FDM), celle ci est employée pour approximer une condition de gradient nul.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} = 0 \tag{1.36}$$

Où \mathbf{n} est la normale à la frontière considérée. Si on considère la sortie d'un écoulement dans un canal (voir figure 1.2), l'extrapolation en termes de fonctions de distribution $f_\alpha(\mathbf{x}, t)$ est exprimée comme suit :

$$f_3(E, t) = f_3(E - 1, t), \quad f_6(E, t) = f_6(E - 1, t) \quad \text{et} \quad f_7(E, t) = f_7(E - 1, t) \tag{1.37}$$

Où $f_3(E - 1, t)$, $f_6(E - 1, t)$ et $f_7(E - 1, t)$ sont les fonctions de distribution obtenues après l'étape de propagation.

Pour avoir plus de précision, Chen et al (1996) [24] ont exprimé l'extrapolation de la manière suivante :

$$\mathbf{u}(E - 1, t) = \frac{\mathbf{u}(E, t) + \mathbf{u}(E - 2, t)}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u}(E, t) = 2 \cdot \mathbf{u}(E - 1, t) - \mathbf{u}(E - 2, t) \tag{1.38}$$

C'est à dire qu'on force la vitesse au nœud ($E - 1$) à être la moyenne entre les deux vitesses aux nœuds (E) et ($E - 2$). En LBM l'extrapolation en termes de fonctions de distribution $f(\mathbf{x}, t)$ est exprimée de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 f_3(E, t) &= 2 \cdot f_3(E - 1, t) - f_3(E - 2, t) \\
 f_6(E, t) &= 2 \cdot f_6(E - 1, t) - f_6(E - 2, t) \\
 f_7(E, t) &= 2 \cdot f_7(E - 1, t) - f_7(E - 2, t)
 \end{aligned} \tag{1.39}$$

On pourrait aussi utiliser un développement de Taylor pour $\mathbf{u}(E - 1)$, et un pour $\mathbf{u}(E - 2)$, et

en déduire que lorsque le gradient de la vitesse est nul on a :

$$\mathbf{u}(E, t) = \frac{4\mathbf{u}(E-1, t) - \mathbf{u}(E-2, t)}{3} \quad (1.40)$$

1.5 Raffinement du maillage en LBM

La méthode LBM emploie souvent un maillage cartésien uniforme avec un $\Delta x = \Delta t = 1$, ce qui la rend moins précise quand il y a besoin d'effectuer des simulations pour une grande résolution, par exemple sur des écoulements autour des géométries complexes, non adaptatives au maillage cartésien. Pour résoudre ces difficultés, deux techniques de raffinement existent, il s'agit de la méthode Multi-grille et la méthode Multi-bloc [25, 26]. Dans la première approche, la grille grossière est présente dans tout le domaine de la simulation, même dans les endroits de la grille fine [27], quant à la technique de raffinement Multi-bloc (voir figure 1.4), la grille grossière est prise en dehors de la grille fine (voir à ce propos les travaux de Filippova & Hänel (1998) [28], Dupuis & Chopard (2003) [29] et Yu & al. (2002)[25]). Chacune de ces techniques a ses avantages et inconvénients, la difficulté vient de la communication de l'information à l'interface entre les différentes grilles du maillage, où il faut assurer la conservation de la masse et la continuité des contraintes. L'échange de l'information à l'interface est d'importance cruciale de point de vue de la précision et de la stabilité numérique. Cet échange est similaire à celui des conditions aux limites, ça pourrait être soit la fonction de distribution ($f_\alpha(\mathbf{x}, t)$) au niveau cinétique, soit des variables macroscopiques telles que la densité ($\rho(\mathbf{x}, t)$) ou la vitesse ($\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$).

Dans notre combinaison de la pénalisation volumique avec la LBM, nous avons choisi le modèle de raffinement proposé par Lagrava et al. (2012) [26], basé sur l'approche Multi-bloc. Le couplage de la grosse grille à la grille fine se fait par une interpolation cubique, cependant, pour le couplage inverse, la communication est réalisée via l'application d'un filtrage. Comparée avec la méthode Multi-grille, le modèle de Lagrava a l'avantage d'avoir de meilleures performances sur la parallélisation (CPU ou GPU), de plus, il permet d'économiser la mémoire de stockage. En revanche, la mise en œuvre du couplage entre les différentes grilles du maillage est plus complexe [26].

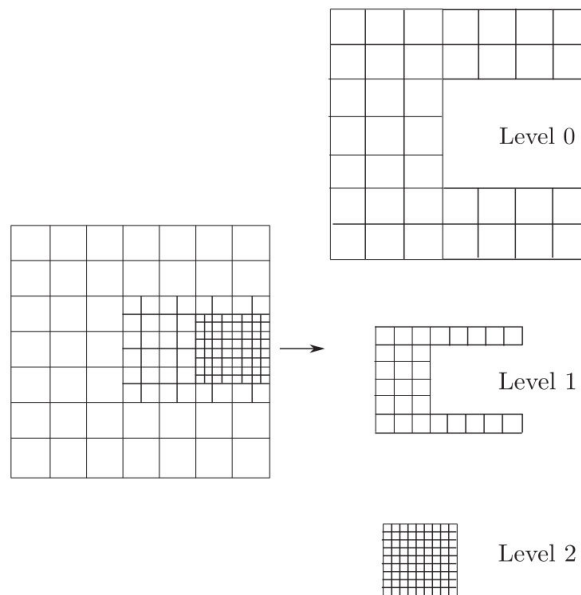


FIGURE 1.4 – Disposition des grilles dans l'approche du raffinement Multi-bloc (Extraite de Lagrava et al.[26]).

Quelques exemples de validation du modèle de Lagrava seront montrés dans les exemples à suivre.

1.6 Quelques applications de la LBM

Dans cette partie, on étudie quelques applications de la méthode LBM sur différents cas tests. On traite un écoulement de Poiseuille, l'équation d'advection-diffusion 2D. Enfin l'application est portée sur une cavité entraînée 2D. De plus, on valide le modèle du raffinement de Lagrava sur l'équation de diffusion 1D et sur un écoulement de Poiseuille. Nous montrons dans tous ces cas, que la LBM permet de retrouver les solutions analytiques ou de référence avec une précision équivalente à des méthodes de résolution classiques (différences finies).

1.6.1 Application sur l'équation de diffusion 1D

Le problème à résoudre consiste à chercher $u(x, t) \in [0, 1] \times [0, T]$ tel que :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right), & x \in [0, 1], t \in [0, T] \\ u(x, 0) = u_0(x) = \sin(\pi x), & x \in [0, 1] \\ u(0, t) = 0, & t > 0 \\ u(L, t) = 0, & t > 0 \end{cases} \quad (1.41)$$

Le modèle du raffinement de Lagrava est d'abord testé sur un cas simple monodimensionnel, il s'agit de l'équation de diffusion 1D, résolue sur une durée de simulation $T = 1s$, une longueur $L = 1m$, une vitesse initiale maximale $u_{max} = 1m/s$ et une viscosité cinématique $\nu = 0.1 \text{ m}^2.s^{-1}$. Cela correspond en LBM, à un intervalle de temps $\tilde{T} = 4000$, une longueur $\tilde{L} = 100$, une vitesse initiale maximale $\tilde{u}_{max} = 0.025$ et une viscosité cinématique $\tilde{\nu} = 0.0833$. Le modèle à deux vitesses discrètes $D1Q2$ est utilisé.

Une solution analytique pour ce genre de condition initiale et conditions aux limites est donnée par :

$$u(x, t) = \sin(\pi x) e^{(-\nu \pi^2 t)} \quad (1.42)$$

Pour la LBM, on a introduit deux grilles du maillage avec un seul degré de raffinement :

$$\begin{cases} \text{grosse grille : } x \in [0, 0.5] & \text{et } \tilde{\Delta}x = \tilde{\Delta}t = 1 \\ \text{grille fine : } x \in [0.49, 1] & \text{et } \tilde{\Delta}x = \tilde{\Delta}t = 0.5 \end{cases} \quad (1.43)$$

On compare sur la figure 1.5, les résultats du raffinement avec ceux de la solution analytique. On constate que les profils de vitesses sont en parfaite concordance.

Le tableau 1.1 rapporte l'erreur relative E_r en norme \mathbf{L}^2 sur la vitesse à différents instants avec et sans raffinement. On remarque que l'erreur diminue légèrement dans le cas du raffinement du maillage.

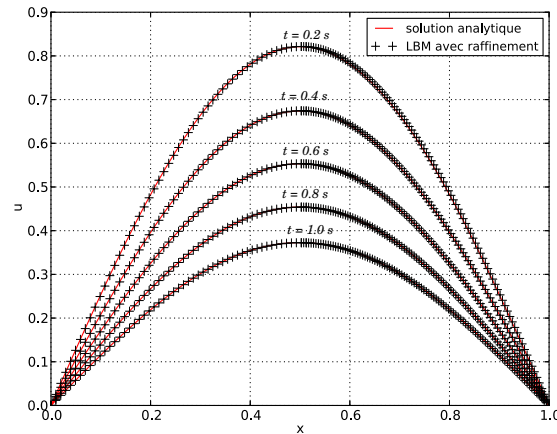


FIGURE 1.5 – Comparaison du champ de vitesse reconstruit à différents instants t obtenus par :
– Solution analytique et + LBM avec un raffinement.

Temps (s)	Er sans raffinement (%)	Er avec raffinement (%)
0.2	0.0069	0.0063
0.4	0.0075	0.0070
0.6	0.0078	0.0073
0.8	0.0075	0.0071
1.0	0.0099	0.0087

TABLE 1.1 – Erreur relative en vitesse à différents instants t

1.6.2 Validation sur l'équation d'advection-diffusion 2D

L'objet de ce paragraphe est de valider la méthode LBM sur un cas bidimensionnel de l'équation d'advection-diffusion de la chaleur. On considère une cavité carrée de côté $L = 1m$, remplie d'un fluide de coefficient de diffusion thermique $\gamma = 0.1 m^2 \cdot s^{-1}$. La paroi gauche de la cavité est maintenue à une température chaude, tandis que les autres parois sont soumises à une température nulle ($T = 0$). La composante horizontale de la vitesse d'advection $u = 0.1m/s$, sa composante verticale $v = 0.5m/s$. Le problème est résolu sur un intervalle de temps de 1 seconde. Le modèle à neuf vitesses discrètes $D2Q9$ est utilisé.

Le problème consiste à chercher $T(x, y, t) \in \Omega \times [0, t]$ tel que :

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \left(\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \gamma \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \\ T(\mathbf{x}, 0) = T_0(\mathbf{x}) = 0 \end{cases} \quad (1.44)$$

Où $T(x, y, t)$ est la température qui est un champ scalaire, le domaine Ω désigne l'espace $[0; 1] \times [0; 1]$. Les conditions aux limites appliquées sont données sur la figure 1.6.

En LBM, la variable macroscopique température (T), représente la somme des fonctions de

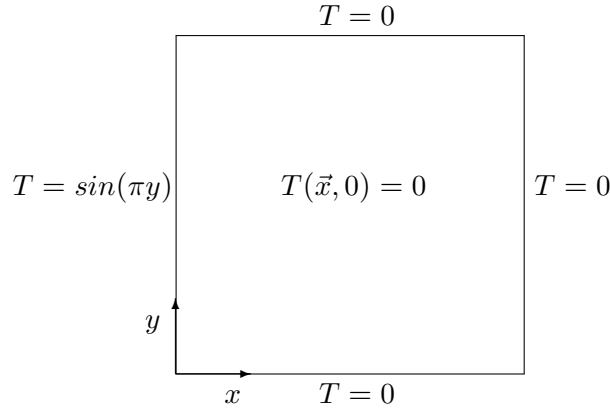


FIGURE 1.6 – Schéma du problème étudié

distribution $f_\alpha(\mathbf{x}, t)$:

$$T(\mathbf{x}, t) = \sum_{\alpha} f_{\alpha}(\mathbf{x}, t) \quad (1.45)$$

La fonction de distribution à l'équilibre $f_{\alpha}^{eq}(\mathbf{x}, t)$ est donnée par :

$$f_{\alpha}^{eq} = \omega_{\alpha} T \left[1 + \frac{(\boldsymbol{\xi}_{\alpha} \cdot \mathbf{u})}{c_s^2} \right] \quad (1.46)$$

Le problème étudié est aussi résolu en différences finies par un schéma d'Euler explicite sur un intervalle de temps de 1 seconde avec un pas de temps $\Delta t = 0.0002s$.

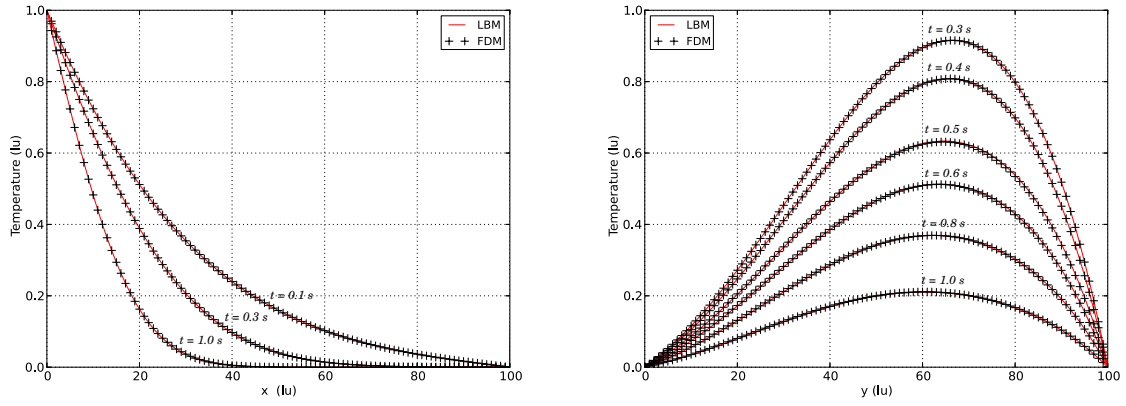
La figure 1.7, compare les résultats de la LBM avec ceux issus de la méthode des différences finies (FDM, Finite Difference Method). L'analyse des profils de température le long de la cavité à différents instants t pour $y = 0.5$, montre que la température diminue de sa valeur maximale ($T = 1$) pour atteindre une valeur nulle (voir figure 1.7.a), cela peut s'expliquer par le fait que la température diffuse au cours du temps. La figure 1.7.b, illustre clairement le phénomène d'advection-diffusion de la chaleur sur une section en travers $x = 0.5$.

On constate que les résultats obtenus par la LBM sont très compatibles avec ceux issus de la méthode des différences finies, ce qui permet de valider la LBM sur un phénomène d'advection-diffusion.

1.6.3 Validation sur un écoulement de Poiseuille 2D

On s'intéresse dans cette section à l'étude d'écoulement laminaire de Poiseuille dans un canal de longueur L et de largeur H . Le principal intérêt de ce type d'écoulement est que l'on connaît la solution (vitesse et pression) analytique exacte.

Le fluide est mis en mouvement par une différence de pression ΔP entre les deux extrémités du canal. Les conditions aux limites de Zou & He sont appliquées à l'entrée et à la sortie pour une pression imposée, et aux parois supérieure et inférieure pour une vitesse nulle (conditions de non glissement). Pour la LBM, le modèle à neuf vitesses discrètes $D2Q9$ est utilisé.



(a) Profils de température le long de la plaque à $y = 0.5$ (b) Profils en travers de température à $x = 0.5$

FIGURE 1.7 – Comparaison des profils de température à différents instants t

La solution analytique de l'écoulement de Poiseuille est donnée par :

$$\begin{cases} u_x(y) = 4 u_{max} \frac{y(H-y)}{H^2} , & 0 \leq y \leq H \\ u_y(x, y) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (1.47)$$

La vitesse maximale u_{max} est liée au gradient de pression par la relation suivante :

$$u_{max} = \frac{1}{8} \frac{\Delta P H^2}{\mu L} = \frac{1}{8} \frac{(P(0) - P(L)) H^2}{\mu L} \quad (1.48)$$

Où μ est la viscosité dynamique du fluide.

La figure 1.8, montre que les profils de vitesse obtenus avec la LBM sont paraboliques et en bonne concordance avec la solution analytique. De plus, on vérifie bien que la vitesse varie avec la hauteur H , mais reste constante le long du canal.

Pour vérifier les calculs relatifs à la pression du fluide, on a comparé les résultats de la LBM avec ceux issus de la solution analytique suivante :

$$P(x) = -\frac{8 u_{max} \mu}{H^2} x + P(0) , \quad 0 \leq x \leq L \quad (1.49)$$

On constate sur la figure 1.9, que la variation de la pression est linéaire, elle est inversement proportionnelle à la longueur du canal, où elle diminue constamment de sa valeur maximale à l'entrée $P(0)$ jusqu'à atteindre une valeur minimale à la sortie $P(L)$. En outre, la pression ne varie pas dans l'épaisseur de l'écoulement. On remarque là aussi que les résultats sont en bon accord avec la solution analytique.

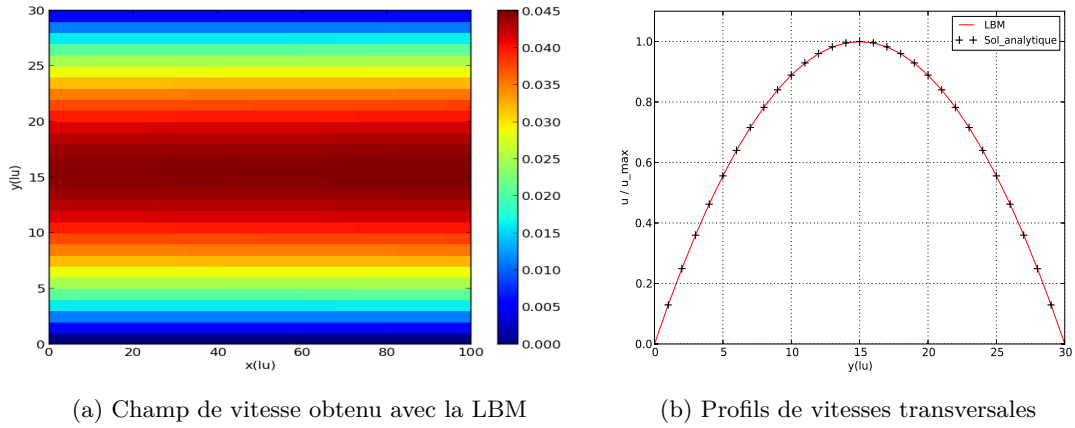


FIGURE 1.8 – Comparaison des vitesses

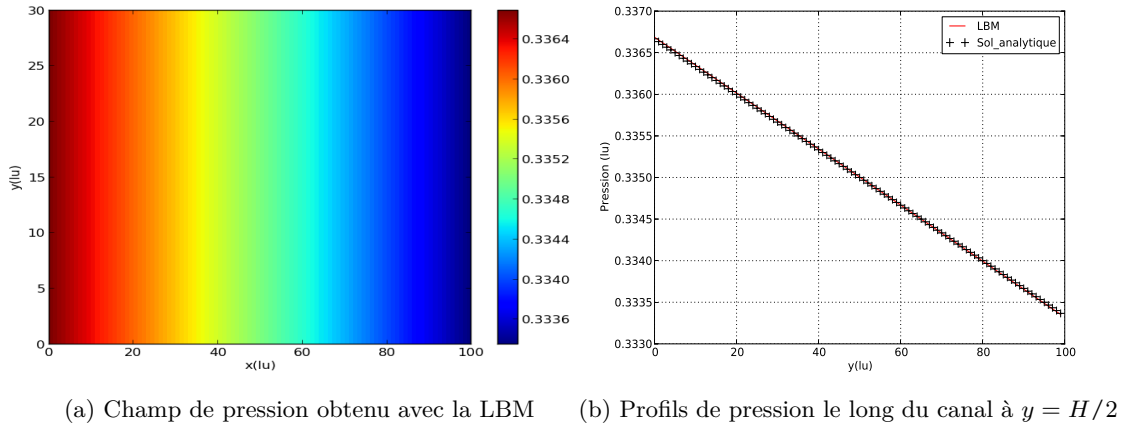
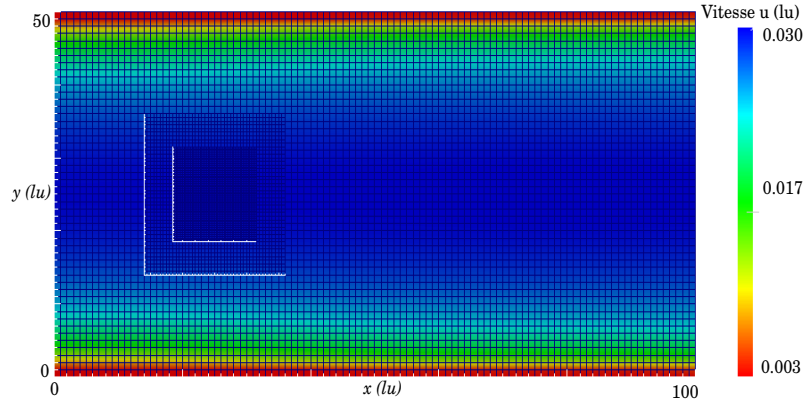
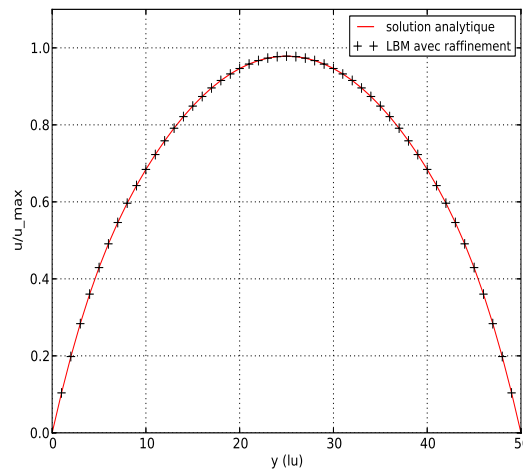


FIGURE 1.9 – Comparaison des pressions

Nous présentons maintenant les résultats de validation du modèle du raffinement de Lagrava sur l'écoulement de Poiseuille dans un canal avec les mêmes données citées ci-dessus. On utilise trois grilles du maillage avec deux degrés de raffinement :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{grosse grille :} & \tilde{\Delta}x = \tilde{\Delta}t = 1 \\ \text{grille fine 1 :} & \tilde{\Delta}x = \tilde{\Delta}t = 0.5 \\ \text{grille fine 2 :} & \tilde{\Delta}x = \tilde{\Delta}t = 0.25 \end{array} \right. \quad (1.50)$$

La figure 1.10, illustre bien la disposition des grilles du maillage utilisées dans nos simulations. On constate sur la figure 1.11 que les profils de vitesse obtenus avec raffinement sont paraboliques et en accord avec la solution analytique.

FIGURE 1.10 – Champ de vitesse u sur un maillage contenant plusieurs raffinement.FIGURE 1.11 – Profil de vitesse horizontale u , sur un maillage contenant plusieurs raffinement.

1.6.4 Validation sur la cavité entraînée 2D

L'objectif de cette partie est de valider la méthode LBM sur la cavité entraînée, un cas test classique très utilisé pour valider les méthodes de résolution du problème de Navier-Stokes [30]. On considère un fluide incompressible dans une cavité carrée 2D, dont l'arête est de longueur L (voir figure 1.12). La paroi supérieure se déplace avec une vitesse longitudinale uniforme u_0 , entraînant ainsi le fluide, tandis que la vitesse des autres parois est nulle. Les conditions aux limites de Zou & He ainsi que de bounce-back, sont respectivement appliquées pour imposer une vitesse constante u_0 , et une vitesse nulle. Les calculs ont été effectués avec un fluide initialement au repos.

Les simulations ont été réalisées sur différents nombres de Reynolds à savoir $Re = 100$, $Re = 1000$ et $Re = 10000$. Les résultats de la LBM sont confrontés aux résultats de Ghia et al.(1982) [30], une solution de référence très utilisée.

Rappelons que le nombre de Reynolds est défini à partir de la longueur L , de la viscosité cinématique ν , et de la vitesse u_0 :

$$Re = \frac{u_0 L}{\nu} \quad (1.51)$$

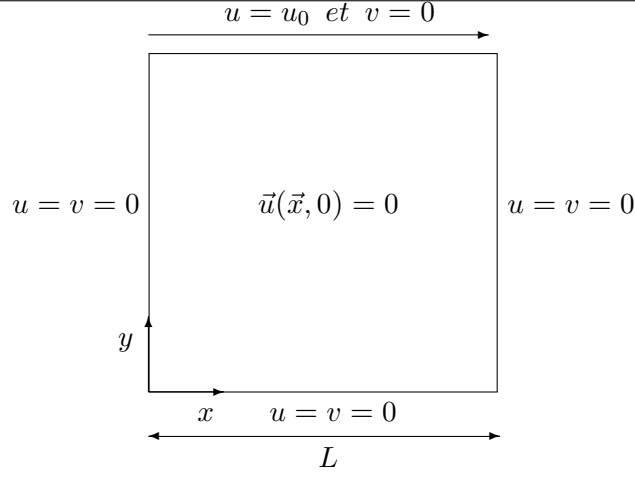


FIGURE 1.12 – Géométrie de la cavité entraînée 2D

Dans le cas où l'écoulement est stationnaire, le critère de convergence suivant est défini :

$$\frac{\sqrt{\sum_{i,j=0}^N (u_{i,j}^t - u_{i,j}^{t-1})^2}}{\sqrt{\sum_{i,j=0}^N (u_{i,j}^t)^2}} \leq 1 \times 10^{-6} \quad (1.52)$$

Où N , représente la taille de la grille utilisée. Le calcul s'arrête lorsque la condition ci-dessus est vérifiée.

Dans le cas d'un écoulement stationnaire, on montre sur la figure 1.13, les variations de la vitesse horizontale en fonction de y en $(x/L) = 0.5$, et la vitesse verticale en fonction de x en $(y/L) = 0.5$, et ce pour les nombres de Reynolds $Re = 100$ et $Re = 1000$. On remarque que la vitesse horizontale est négative dans la partie inférieure de la cavité, elle devient positive au fur et à mesure qu'on monte vers la partie supérieure (figure 1.13.a). De plus, on constate que la vitesse verticale est positive pour des sections $(x/L) \leq 0.55$, elle devient négative sur l'autre moitié de la cavité (figure 1.13.b). On constate que les profils de vitesses obtenus avec la méthode LBM correspondent aux résultats issus de Ghia et al. [30].

Dans tous les cas simulés, on constate que lorsque la paroi supérieure glisse, elle entraîne par viscosité le fluide vers la paroi verticale de droite, donnant lieu à des trajectoires circulaires. Il en résulte dans le cas d'un écoulement stationnaire ($Re = 1000$), la formation d'un tourbillon principal centré, et deux autres tourbillons secondaires dans les coins inférieurs. Par ailleurs, pour un écoulement instationnaire ($Re = 10000$), on remarque qu'un troisième tourbillon apparaît en haut à gauche de la cavité, et deux autres tourbillons se forment dans le même coin en bas à droite.

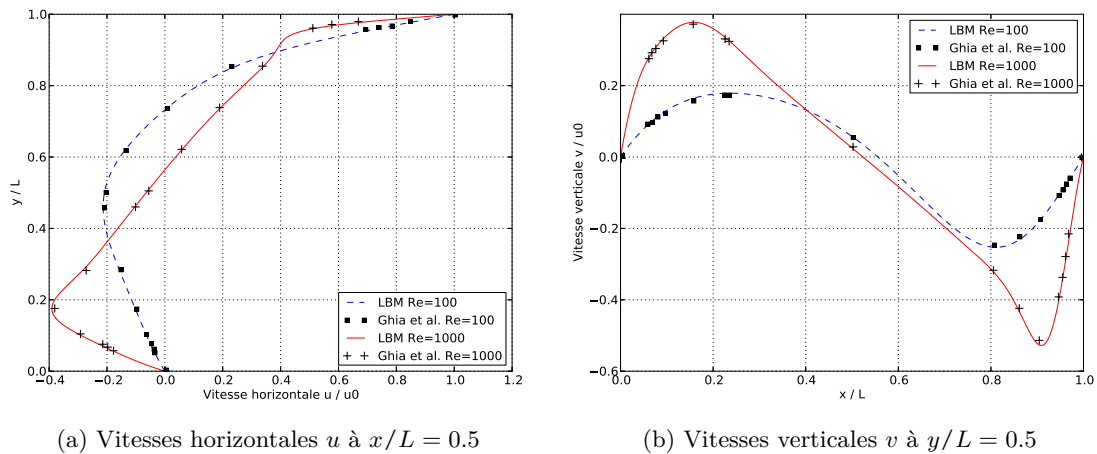


FIGURE 1.13 – Comparaison des profils de vitesses avec les résultats de Ghia et al. pour $Re = 100$ et $Re = 1000$

1.7 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre nous avons présenté le cadre de base et les principales caractéristiques de la méthode lattice Boltzmann, on a discuté ses avantages et inconvénients, nous avons aussi vu que la LBM peut être dérivée directement de l'équation de Boltzmann. L'essence de la résolution numérique repose sur une restriction des vitesses lattices ξ en un ensemble discret. En outre, nous avons rappelé le modèle à 2 dimensions et à 9 vitesses discrètes (D2Q9), qui est choisi pour nos simulations 2D.

Par ailleurs, nous avons rappelé que l'équation de lattice Boltzmann avec l'opérateur de collision BGK permettait de retrouver les équations de Navier-Stokes compressibles en utilisant le développement asymptotique de Chapman-Enskog. Celui-ci permet de faire le lien entre les deux échelles macro et mésoscopique.

L'accent a été également mis sur les différentes approches permettant de modéliser les conditions aux limites en LBM. Le lien entre les unités physiques et les unités utilisées en LBM a également été introduit. Ce lien soulignant l'importance des maillages à utiliser en LBM, et donc le temps de calcul inhérent, la méthode de raffinement du maillage proposée par Lagrava et al, permettant ainsi de relâcher le maillage loin des zones d'intérêt, a été utilisé.

Plusieurs cas tests sur des problèmes de mécanique en 1D et 2D ont été traités. Ceux-ci permettent d'exposer la pluralité des domaines pouvant être traités en LBM. Pour chaque cas une validation a été effectuée soit via une solution analytique, soit des données de la littérature.

Le chapitre suivant aborde le traitement des domaines mobiles par la méthode de lattice Boltzmann.

Chapitre 2

État de l'art sur l'utilisation de la LBM en interaction fluide-structure

Sommaire

2.1	Introduction	24
2.2	Méthode du bounce back	24
2.3	Méthode "Immersed moving boundary"	31
2.4	Méthode des frontières immergées	32
2.4.1	Équations relatives à la méthode des frontières immergées	33
2.4.2	Méthode des frontières immergées combinée avec la LBM	36
2.4.2.1	Méthode classique de Peskin combinée avec la LBM	36
2.4.2.2	Méthode "direct forcing" appliquée à la LBM	38
2.4.2.3	Méthode "momentum exchange" appliquée à la technique des frontières immergées	41
2.4.2.4	Méthode avec correction de vitesse	42
2.5	Méthode des Multiplicateurs de Lagrange	46
2.6	Méthode ALE (<i>Arbitrary Lagrangian Eulerian</i>)	50
2.7	Conclusion du chapitre	53

2.1 Introduction

L'interaction fluide-structure a lieu lorsqu'un fluide est en contact avec une structure en mouvement. Le fluide exerce alors des forces sur la frontière de la structure, et la structure se déforme ou se déplace sous l'action de ces forces. De plus, la déformation ou le déplacement de la structure modifie les champs de vitesse et de pression de l'écoulement fluide. Vu leur importance, les problèmes d'écoulements autour de structures en mouvement font l'objet de plusieurs travaux numériques et expérimentaux. Dans ce chapitre, on s'intéresse aux différentes approches et modèles qui ont été mis en œuvre jusqu'à présent et qui utilisent la méthode de lattice Boltzmann pour le calcul de l'écoulement.

Ce chapitre débute par une description des premières approches qui se basent sur les conditions aux limites de type bounce back, on discutera notamment la méthode de Ladd [31] et celle de Bouzidi et al. [32]. Nous nous intéressons ensuite à l'approche de Noble et Torczynski [33], construite par rapport à l'équation de lattice Boltzmann avec l'opérateur de collision BGK. Puis une attention particulière est apportée à la méthode des frontières immergées, qui est très utilisée ces dernières années pour modéliser des écoulements autour d'obstacles immobiles ou en mouvement. On détaille ensuite la méthode des multiplicateurs de Lagrange et des domaines fictifs, et enfin on présente la méthode ALE (Arbitrary Lagrangian Eulerian) combinée avec la LBM.

2.2 Méthode du bounce back

En 1994, Ladd [34, 21], a appliqué la méthode de lattice Boltzmann à la simulation des particules en suspension dans un fluide. Pour modéliser les conditions aux limites à l'interface fluide-particule, la condition de non-glissement sur l'interface est appliquée en utilisant la règle du bounce back ou rebond en arrière. Comme le montre la figure 2.1, l'interface fluide-particule est représentée par des nœuds de frontière, qui sont un ensemble de points (nœuds carrés) situés au milieu des liens entre deux nœuds du maillage cartésien. L'un de ces nœuds appartient au domaine fluide et l'autre situé dans le domaine solide. La frontière de la particule est considérée sous la forme d'escalier, ainsi les conditions de bounce back peuvent être appliquées directement. Cette disposition nécessite l'utilisation d'un grand nombre de nœuds solides, afin de représenter correctement la frontière physique de la particule.

Avant d'expliquer le principe du bounce back, il est important de rappeler que la méthode de lattice Boltzmann se programme en deux étapes :

1. une étape de collision :

$$\tilde{f}_\alpha(\mathbf{x}, t + \Delta t) = f_\alpha(\mathbf{x}, t) - \frac{\Delta t}{\tau} [f_\alpha(\mathbf{x}, t) - f_\alpha^{eq}(\mathbf{x}, t)] \quad (2.1)$$

2. une étape de propagation :

$$f_\alpha(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}_\alpha \Delta t, t + \Delta t) = \tilde{f}_\alpha(\mathbf{x}, t + \Delta t) \quad (2.2)$$

Après l'étape de la collision, on connaît la fonction $\tilde{f}_\alpha(\mathbf{x}_f, t)$ au niveau du nœud fluide de coordonnées \mathbf{x}_f (voir figure 2.2), mais on ne connaît pas la fonction $\tilde{f}_{\tilde{\alpha}}(\mathbf{x}_b, t)$ qui vient du nœud de coordonnées \mathbf{x}_b à l'intérieur du solide, et qui sera propagé vers le nœud fluide de coordonnées \mathbf{x}_f .

Pour calculer cette fonction manquante, on peut supposer que la particule fluide issue du

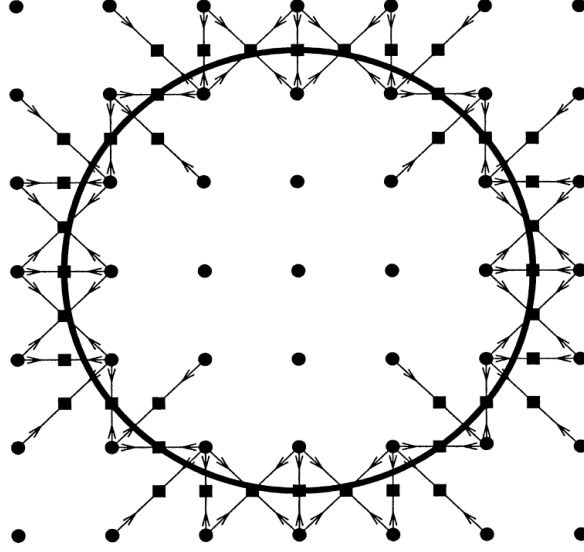


FIGURE 2.1 – Représentation par Ladd d'une interface fluide-particule. Les nœuds de la frontière sont représentés par des carrés et les nœuds du maillage par des cercles. [34, 31]

noeud de coordonnées \mathbf{x}_f rebondit sur la paroi, ce qui revient à dire que :

$$\tilde{f}_{\bar{\alpha}}(\mathbf{x}_b, t) = \tilde{f}_{\alpha}(\mathbf{x}_f, t) \quad (2.3)$$

où $\bar{\alpha}$ désigne la direction opposée à α ($\xi_{\bar{\alpha}} = -\xi_{\alpha}$, voir figure 2.2), et \tilde{f}_{α} est la fonction de distribution après la collision. Ladd (1994) [34, 21] a modifié le bounce back classique pour prendre en compte le mouvement du solide sur lequel le rebond a lieu. Lorsqu'une particule fluide heurte une paroi en mouvement, la quantité de mouvement de la particule est modifiée, et pour prendre en compte ce phénomène, on ajoute un terme au second membre de l'équation 2.3 :

$$\tilde{f}_{\bar{\alpha}}(\mathbf{x}_b, t) = \tilde{f}_{\alpha}(\mathbf{x}_f, t) - \frac{2}{c_s^2} \omega_{\alpha} \rho_w \xi_{\alpha} \cdot \mathbf{u}_w \quad (2.4)$$

où ρ_w est la densité du fluide au voisinage de la paroi solide, et \mathbf{u}_w est la vitesse de la paroi solide. Ainsi, la quantité de mouvement est conservée.

Ladd [34] a aussi proposé une méthode permettant, avec la LBM, de calculer la force exercée par le fluide sur un obstacle. Cette méthode, dénommée "momentum exchange" est simple à mettre en oeuvre, et elle est par conséquent beaucoup utilisée. Le principe de cette méthode est de calculer la variation de quantité de mouvement d'une particule fluide après sa collision avec un obstacle. En LBM, avant d'avoir heurté une paroi solide, une particule fluide se déplace avec une vitesse ξ_{α} ; après avoir heurté la paroi, sa vitesse est inversée pour devenir $\xi_{\bar{\alpha}} = -\xi_{\alpha}$ (voir figure 2.2). Ainsi, avant la collision avec la paroi, la particule fluide qui se déplace avec la vitesse ξ_{α} , a une quantité de mouvement égale à $\xi_{\alpha} \tilde{f}_{\alpha}(\mathbf{x}_f, t)$, et la particule qui a rebondi sur la paroi a une quantité de mouvement $\xi_{\bar{\alpha}} \tilde{f}_{\bar{\alpha}}(\mathbf{x}_b, t + \Delta t) = \xi_{\bar{\alpha}} \tilde{f}_{\bar{\alpha}}(\mathbf{x}_b, t)$. L'échange de quantité de mouvement pendant un intervalle de temps, suivant la direction α , de la particule située dans le solide (point \mathbf{x}_b) avec la particule située au point \mathbf{x}_f vaut donc :

$$\xi_{\bar{\alpha}} \tilde{f}_{\bar{\alpha}}(\mathbf{x}_b, t) - \xi_{\alpha} \tilde{f}_{\alpha}(\mathbf{x}_f, t) = \xi_{\bar{\alpha}} (\tilde{f}_{\bar{\alpha}}(\mathbf{x}_b, t) + \tilde{f}_{\alpha}(\mathbf{x}_f, t)) \quad (2.5)$$

Pour un noeud solide \mathbf{x}_b , l'échange de quantité de mouvement avec tous les noeuds fluides voisins pendant un intervalle de temps Δt est donné par :

$$\sum_{\alpha=1}^{N_d} \xi_{\bar{\alpha}} [\tilde{f}_{\bar{\alpha}}(\mathbf{x}_b, t) + \tilde{f}_{\alpha}(\mathbf{x}_f, t)] \Delta x \Delta x / \Delta t \quad (2.6)$$

où N_d est le nombre de vitesses lattices non nulles. Si on généralise sur tous les noeuds de la frontière, on arrive à avoir la force totale qui agit sur le solide :

$$\mathbf{F} = \sum_{\mathbf{x}_b} \sum_{\alpha=1}^{N_d} \xi_{\bar{\alpha}} [\tilde{f}_{\bar{\alpha}}(\mathbf{x}_b, t) + \tilde{f}_{\alpha}(\mathbf{x}_f, t)] \Delta x \Delta x / \Delta t \quad (2.7)$$

Cette méthode est beaucoup utilisée car elle est facile à mettre en œuvre. Notons qu'il existe une autre méthode classiquement utilisée en CFD (Computational Fluid Dynamics), mais plus difficile à appliquer que la méthode "momentum exchange". Cette méthode consiste à intégrer les efforts de pression et de viscosité sur la frontière de l'obstacle :

$$\mathbf{F} = \int_{\partial\Omega} (-p\mathbf{I} + \rho\nu(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T)) \cdot \mathbf{n} ds \quad (2.8)$$

où p est la pression, \mathbf{I} est la matrice identité, \mathbf{n} est la normale sortante du solide, à la frontière $\partial\Omega$, T est l'opérateur transposé. Cette méthode est assez difficile à mettre en œuvre pour des écoulements autour d'obstacles de forme complexe, elle est donc moins utilisée que la méthode "momentum exchange".

Concernant les conditions aux limites de rebond des particules fluides sur les parois, calculées avec la méthode du bounce back développée par Ladd, cette méthode est précise lorsque la frontière physique est au milieu entre deux noeuds fluides et solides, mais ce n'est pas le cas pour une position quelconque. Pour surmonter cet inconvénient, de nombreux efforts ont été faits pour développer et améliorer les conditions aux limites de bounce back, afin de simuler les écoulements autour des objets en mouvement de géométries complexes notamment curvilignes.

Pour avoir la position exacte d'un noeud \mathbf{x}_w qui appartient à la frontière physique, située entre un noeud fluide \mathbf{x}_f et un noeud solide \mathbf{x}_b (voir figure 2.2), on définit le paramètre Δ tel que :

$$\Delta = \frac{|\mathbf{x}_f - \mathbf{x}_w|}{|\mathbf{x}_f - \mathbf{x}_b|}, \quad 0 \leq \Delta \leq 1 \quad (2.9)$$

Filippova et Hänel [28], sont les premiers à présenter un modèle qui traite une frontière courbée avec la méthode lattice Boltzmann. La fonction de distribution après collision $\tilde{f}_{\bar{\alpha}}(\mathbf{x}_b, t)$ provenant du noeud solide de coordonnées \mathbf{x}_b est inconnue, elle est nécessaire afin de compléter l'étape de propagation au noeud fluide de coordonnées \mathbf{x}_f . Dans cette approche, Filippova et Hänel ont corrigé la méthode du bounce back de Ladd [34] en introduisant une fonction de distribution à l'équilibre fictive $f_{\alpha}^{(*)}(\mathbf{x}_b, t)$ (fonction d'équilibre dans les noeuds solides) :

$$\tilde{f}_{\bar{\alpha}}(\mathbf{x}_b, t) = (1 - \chi)\tilde{f}_{\alpha}(\mathbf{x}_f, t) + \chi f_{\alpha}^{(*)}(\mathbf{x}_b, t) - \frac{2}{c_s^2} \omega_{\alpha} \rho_w \xi_{\alpha} \cdot \mathbf{u}_w \quad (2.10)$$

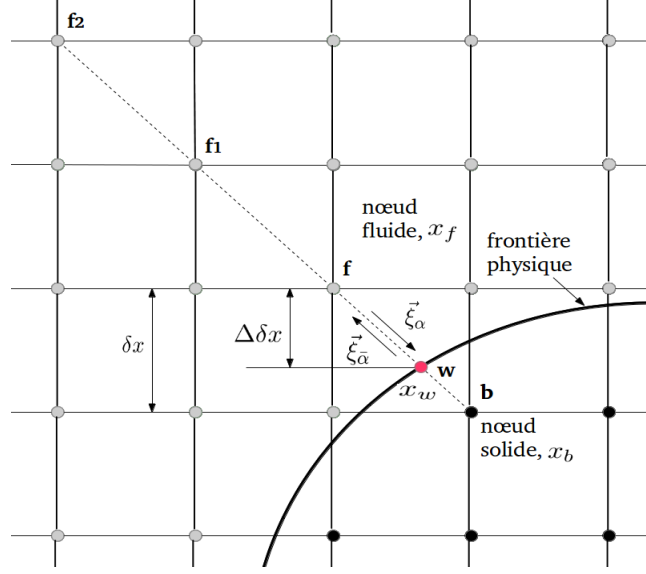


FIGURE 2.2 – Représentation d’une frontière solide dans un fluide [35, 5].

où χ est un facteur de pondération à déterminer, qui contrôle l’interpolation ou l’extrapolation linéaire entre $f_\alpha^{(*)}(\mathbf{x}_b, t)$ et $\tilde{f}_{\bar{\alpha}}(\mathbf{x}_b, t)$. La fonction de distribution à l’équilibre fictive est donnée par :

$$f_\alpha^{(*)}(\mathbf{x}_b, t) = \omega_\alpha \rho \left[1 + \frac{(\boldsymbol{\xi}_\alpha \cdot \mathbf{u}_{bf})}{c_s^2} + \frac{(\boldsymbol{\xi}_\alpha \cdot \mathbf{u}_f)^2}{2c_s^4} - \frac{\mathbf{u}_f^2}{2c_s^2} \right] \quad (2.11)$$

où $\mathbf{u}_f = \mathbf{u}(\mathbf{x}_f, t)$ est la vitesse du fluide près de la frontière solide (voir figure 2.2). \mathbf{u}_{bf} et χ sont donnés par :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{bf} = \mathbf{u}_f & \text{et} \quad \chi = \frac{(2\Delta - 1)}{(\tau - 1)} \quad \text{pour } \Delta < \frac{1}{2} \\ \mathbf{u}_{bf} = \frac{(\Delta - 1)}{\Delta} \mathbf{u}_f + \frac{1}{\Delta} \mathbf{u}_w & \text{et} \quad \chi = \frac{(2\Delta - 1)}{\tau} \quad \text{pour } \Delta \geq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (2.12)$$

Mei et al [35] en 1999, puis Mei et al [36] en 2002, ont étendu le modèle de Filippova et Hänel afin d’améliorer sa stabilité et sa précision. La manière dont $\tilde{f}_{\bar{\alpha}}(\mathbf{x}_b, t)$ et $f_\alpha^{(*)}(\mathbf{x}_b, t)$ sont calculés est la même, mais \mathbf{u}_{bf} et χ changent. Les modifications apportées sont les suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{bf} = \mathbf{u}_{f_1} = \mathbf{u}(\mathbf{x}_f + \boldsymbol{\xi}_{\bar{\alpha}} \Delta t, t) & \text{et} \quad \chi = \frac{(2\Delta - 1)}{(\tau - 2)} \quad \text{pour } \Delta < \frac{1}{2} \\ \mathbf{u}_{bf} = \frac{(\Delta - 1)}{\Delta} \mathbf{u}_f + \frac{3}{2\Delta} \mathbf{u}_w & \text{et} \quad \chi = \frac{(2\Delta - 1)}{(\tau + 1/2)} \quad \text{pour } \Delta \geq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (2.13)$$

De plus, concernant le calcul de la force exercée par le fluide sur l’obstacle, Mei et al [36] ont utilisé la méthode classique développée en CFD (voir équation 2.8), dans laquelle ils ont

proposé de calculer le tenseur des contraintes visqueuses de composantes $\sigma_{ij} = \rho\nu(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})$ en utilisant le développement de Chapman-Enskog et la fonction de distribution de non équilibre $f_\alpha^{neq} = f_\alpha - f_\alpha^{eq}$:

$$\sigma_{ij} = \left(1 - \frac{1}{2\tau}\right) \sum_\alpha \left(\xi_{\alpha i} \xi_{\alpha j} - \frac{\delta_{ij}}{D} \boldsymbol{\xi}_\alpha \cdot \boldsymbol{\xi}_\alpha \right) f_\alpha^{neq} \quad (2.14)$$

où D est la dimension d'espace, δ le symbole de Kronecker (matrice unité), et τ est le temps de relaxation.

L'application de Mei et al [35] est portée sur un écoulement $2D$ dans un canal, généré par un gradient de pression, dont la solution analytique est connue, sur un écoulement de fluide dans une cavité entraînée, et sur un écoulement uniforme autour de plusieurs cylindres. Une précision à l'ordre 2 est constatée.

Bouzidi et al (2001)[32], ont proposé un autre modèle pour calculer des écoulements autour de solides avec une frontière curviligne. Ils combinent le schéma de bounce back avec une approche d'interpolation linéaire ou quadratique. Le modèle de Bouzidi et al avec l'interpolation linéaire peut être formulé comme suit :

$$\begin{cases} \tilde{f}_\alpha(\mathbf{x}_b, t) = 2\Delta \tilde{f}_\alpha(\mathbf{x}_f, t) + (1 - 2\Delta) \tilde{f}_\alpha(\mathbf{x}_{f_1}, t) & \text{pour } \Delta < \frac{1}{2} \\ \tilde{f}_\alpha(\mathbf{x}_b, t) = \frac{1}{2\Delta} \tilde{f}_\alpha(\mathbf{x}_f, t) + \frac{(2\Delta - 1)}{2\Delta} \tilde{f}_\alpha(\mathbf{x}_f, t) & \text{pour } \Delta \geq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (2.15)$$

où les nœuds de coordonnées \mathbf{x}_b , \mathbf{x}_f , \mathbf{x}_{f_1} sont représentés sur la figure 2.2. Pour obtenir une meilleure précision, Bouzidi et al. ont aussi développé un schéma de bounce back avec une interpolation quadratique. Pour cela on doit rajouter un nœud supplémentaire dans le domaine fluide. Ce modèle prend la forme suivante :

$$\begin{cases} \tilde{f}_\alpha(\mathbf{x}_b, t) = \Delta(1 + 2\Delta) \tilde{f}_\alpha(\mathbf{x}_f, t) + (1 - 4\Delta^2) \tilde{f}_\alpha(\mathbf{x}_{f_1}, t) - \Delta(1 - 2\Delta) \tilde{f}_\alpha(\mathbf{x}_{f_2}, t) \\ \text{pour } \Delta < \frac{1}{2} \\ \tilde{f}_\alpha(\mathbf{x}_b, t) = \frac{1}{\Delta(2\Delta + 1)} [\tilde{f}_\alpha(\mathbf{x}_f, t) - (1 - 4\Delta^2) \tilde{f}_\alpha(\mathbf{x}_f, t) + \Delta(1 - 2\Delta) \tilde{f}_\alpha(\mathbf{x}_{f_1}, t)] \\ \text{pour } \Delta \geq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (2.16)$$

Bouzidi et al ont appliqué leur modèle sur un écoulement de Couette, de Poiseuille et sur un écoulement stationnaire dans un milieu poreux formé de cylindres. Dans le cas de solides immobiles, ils constatent une précision à l'ordre 2 [32].

Lallemand et Luo (2003)[16], ont apporté quelques modifications au modèle de Bouzidi et al, en se concentrant sur la modélisation des problèmes de frontières mobiles. Ce modèle est exprimé par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{f}_{\bar{\alpha}}(\mathbf{x}_b, t) = \Delta(1 + 2\Delta)\tilde{f}_{\alpha}(\mathbf{x}_f, t) + (1 - 4\Delta^2)\tilde{f}_{\alpha}(\mathbf{x}_{f_1}, t) - \Delta(1 - 2\Delta)\tilde{f}_{\alpha}(\mathbf{x}_{f_2}, t) \\ \quad + 3w_{\alpha}(\boldsymbol{\xi}_{\alpha} \cdot \mathbf{u}_w) \quad \text{pour } \Delta < \frac{1}{2} \\ \tilde{f}_{\bar{\alpha}}(\mathbf{x}_b, t) = \frac{1}{\Delta(2\Delta + 1)}\tilde{f}_{\alpha}(\mathbf{x}_f, t) + \frac{(2\Delta - 1)}{\Delta}\tilde{f}_{\alpha}(\mathbf{x}_{f_1}, t) - \frac{(2\Delta - 1)}{(2\Delta + 1)}\tilde{f}_{\alpha}(\mathbf{x}_{f_2}, t) \\ \quad + \frac{3w_{\alpha}}{\Delta(2\Delta + 1)}(\boldsymbol{\xi}_{\alpha} \cdot \mathbf{u}_w) \quad \text{pour } \Delta \geq \frac{1}{2} \end{array} \right. \quad (2.17)$$

Un défaut du modèle de bounce back avec interpolation de Bouzidi et al [32], et de Lallemand et Luo [16], est que la masse n'est pas conservée à l'interface fluide-solide. Pour éviter ce problème, Kao et Yang [37] ont proposé un schéma de bounce back bâti sur les principes de changement d'échelle, utilisés dans les méthodes de changement de maillage développées pour la méthode de lattice Boltzmann (méthode initiée par Filippova et Hänel [28]). La viscosité en quantité physique dépend de Δx , elle doit être conservée dans le maillage fin et grossier, lorsque on raffine autour du solide. D'autre part, il faut traiter le changement du maillage pour la fonction de distribution. La fonction d'équilibre $f_{\alpha}^{eq}(\mathbf{x}, t)$ dépend de ρ et \mathbf{u} (qui ne changent pas avec le maillage), mais ce n'est pas le cas avec la partie de non équilibre $f_{\alpha}^{neq}(\mathbf{x}, t)$ où le raffinement du maillage est effectué pour ce terme-là. Sur le nœud fluide voisin de l'interface (considéré comme un nœud du maillage grossier), on effectue un changement d'échelle (maillage grossier vers maillage fin) et on calcule donc la fonction de distribution correspondant à un maillage fin $f_{\alpha}^{(f)}(\mathbf{x}_f, t)$:

$$\tilde{f}_{\alpha}^{(f)}(\mathbf{x}_f, t) = f_{\alpha}^{eq}(\mathbf{x}_f, t) + \left[\tilde{f}_{\alpha}(\mathbf{x}_f, t) - f_{\alpha}^{eq}(\mathbf{x}_f, t) \right] q \frac{\omega(1 - \omega^{(f)})}{\omega^{(f)}(1 - \omega)} \quad (2.18)$$

avec :

$$\omega^{(f)} = \frac{2q}{q + \left(\frac{2}{\omega} - 1 \right)} \quad (2.19)$$

où $q = \Delta x^{(f)}/\Delta x$, et $\omega = \Delta t/\tau$. Cette fonction de distribution peut ensuite être propagée dans le maillage fin, sur l'interface fluide solide (par exemple sur le nœud \mathbf{w} , si on s'intéresse à la fonction de distribution $\tilde{f}_{\bar{s}}$ sur la figure 2.2). Cette méthode a été utilisée par Grucelski et Pozorski [38] pour modéliser des écoulements autour d'un cylindre, et autour d'un ensemble de cylindres. Ils ont montré que cette méthode donne de meilleurs résultats que la méthode de bounce back de la fonction de non équilibre développée par Zou et He [23] (et présentée dans le chapitre précédent) sur des maillages grossiers.

Récemment Yin et Zhang [19] ont présenté une nouvelle approche afin d'améliorer les conditions aux limites de bounce back proposées initialement par Ladd [34, 21], pour le traitement des surfaces de géométries complexes en mouvement. La fonction de distribution obtenue durant le processus du bounce back est calculée en utilisant la vitesse \mathbf{u}_m du nœud de coordonnées \mathbf{x}_m

situé au milieu des nœuds solide \mathbf{x}_b et fluide \mathbf{x}_f (voir figure 2.3), cette vitesse est interpolée ou extrapolée selon le paramètre Δ . Le principe algorithmique est explicité dans l'exemple ci-dessous.

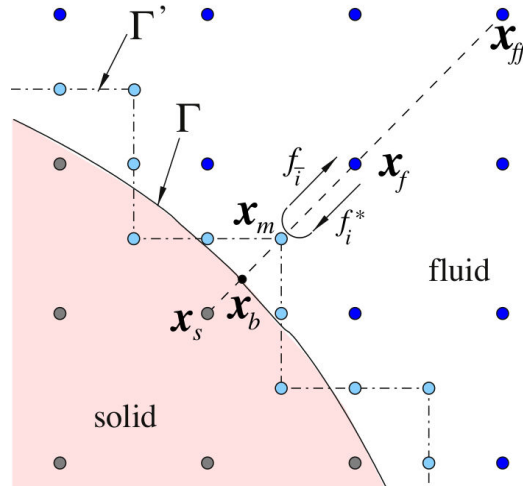


FIGURE 2.3 – Représentation d'une frontière solide dans un fluide, pour l'application du bounce-back de Yin et Zhang [19].

Considérant le modèle $D2Q9$, après l'étape de collision au nœud fluide de coordonnées \mathbf{x}_f , la fonction $\tilde{f}_\alpha(\mathbf{x}_f, t)$ ($\alpha = 7$) quitte le nœud de coordonnées \mathbf{x}_f , puis elle est supposée être rebondie au nœud du milieu de coordonnées \mathbf{x}_m dans le sens inverse ($\alpha = 5$) avec une magnitude modifiée comme suit :

$$\tilde{f}_{\bar{\alpha}}(\mathbf{x}_b, t) = \tilde{f}_\alpha(\mathbf{x}_f, t) - \frac{2}{c_s^2} \omega_\alpha \rho \boldsymbol{\xi}_\alpha \cdot \mathbf{u}_m \quad (2.20)$$

L'expression 2.20 est très similaire à celle de Ladd [34, 21], la différence c'est que Yin et Zhang [19] utilisent la vitesse \mathbf{u}_m au lieu de la vitesse \mathbf{u}_b . La frontière physique Γ est donc remplacée par une autre frontière virtuelle Γ' représentée par une surface en escalier (voir la ligne discontinue sur la figure 2.3).

Pour $\Delta \leq \frac{1}{2}$, le nœud de coordonnées \mathbf{x}_m est situé entre les nœuds \mathbf{x}_b et \mathbf{x}_f , et la vitesse du milieu \mathbf{u}_m peut être facilement obtenue avec une interpolation linéaire. Cependant, pour $\Delta > \frac{1}{2}$, le nœud \mathbf{x}_m est situé dans le domaine solide et donc une extrapolation est nécessaire pour obtenir la vitesse \mathbf{u}_m . Pour une meilleure stabilité numérique Yin et Zhang [19] utilisent la vitesse $\mathbf{u}_{ff} = \mathbf{u}(\mathbf{x}_{ff})$ du nœud fluide \mathbf{x}_{ff} .

$$\begin{cases} \mathbf{u}_m = \frac{\frac{1}{2}\mathbf{u}_b + \left(\frac{1}{2} - \Delta\right)\mathbf{u}_f}{(1 - \Delta)} & \text{pour } \Delta \leq \frac{1}{2} \\ \mathbf{u}_m = \frac{\frac{3}{2}\mathbf{u}_b - \left(\Delta - \frac{1}{2}\right)\mathbf{u}_{ff}}{(2 - \Delta)} & \text{pour } \Delta > \frac{1}{2} \end{cases} \quad (2.21)$$

Un cas particulier lorsque $\Delta = \frac{1}{2}$, où $\mathbf{u}_m = \mathbf{u}_b$, l'approche de Yin et Zhang [19] se simplifie à la

méthode originale de Ladd.

Des simulations ont été effectuées sur un écoulement de Poiseuille dans un canal aligné puis incliné, sur un écoulement de Couette entre deux surfaces cylindriques coaxiales, et enfin sur un écoulement autour d'une sphère. En comparaison avec d'autres modèles existants qui traitent le problème de frontières mobiles, l'approche de Yin et Zhang [19] possède un algorithme plus simple et présente une meilleure précision dans la description de champ d'écoulement et l'interaction entre le fluide et la structure.

Pour conclure sur la méthode du bounce back, on peut dire qu'il est nécessaire avec cette méthode d'utiliser un grand nombre de noeuds solides pour représenter avec précision un obstacle. Si ce n'est pas fait, ceci peut entraîner des fluctuations au niveau du calcul des forces à la frontière du solide lorsque le solide se déplace. Par ailleurs, lorsque l'obstacle se déplace, il faut aussi trouver une alternative pour prendre en compte, entre deux pas de temps, la fonction de distribution des noeuds solides qui deviennent des noeuds fluides, et pour évaluer la fonction de distribution de ces noeuds. Cette méthode n'est donc pas aisée à mettre en oeuvre pour des problèmes d'interaction fluide-structure.

2.3 Méthode "Immersed moving boundary"

En 1998, Noble et Torczynski [33], qui s'intéressaient au problème de pompage d'huile dans des milieux sableux, et donc à des écoulements de fluide avec des grosses particules, ont développé une méthode basée sur l'équation de lattice Boltzmann avec le terme de collision BGK :

$$f_\alpha(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}_\alpha \Delta t, t + \Delta t) - f_\alpha(\mathbf{x}, t) = -\frac{\Delta t}{\tau} (f_\alpha(\mathbf{x}, t) - f_\alpha^{eq}(\mathbf{x}, t)) \quad (2.22)$$

Dans cette équation, un terme source est introduit, permettant de ne résoudre que l'équation du fluide lorsque le volume de contrôle qui entoure le noeud \mathbf{x} (voir figure 2.4) est exempt de particules, et d'aboutir à la condition aux limites de bounce back de Zou et He [23] lorsque le volume entourant le noeud \mathbf{x} n'est occupé que de solide. L'équation de lattice Boltzmann ainsi modifiée s'écrit :

$$\begin{aligned} f_\alpha(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}_\alpha \Delta t, t + \Delta t) &= f_\alpha(\mathbf{x}, t) + \left(1 - \sum_s B(\epsilon_s, \tau)\right) \left(-\frac{\Delta t}{\tau}\right) (f_\alpha(\mathbf{x}, t) - f_\alpha^{eq}(\mathbf{x}, t)) \\ &\quad + \sum_s B(\epsilon_s, \tau) \Omega_\alpha^s \end{aligned} \quad (2.23)$$

où $B(\epsilon_s, \tau)$ est une fonction de pondération permettant de passer du cas où le volume de contrôle n'est rempli que de fluide ($B(\epsilon_s, \tau) = 0$), au cas où le volume de contrôle n'est rempli que de solide ($B(\epsilon_s, \tau) = 1$).

$$B(\epsilon_s, \tau) = \frac{\epsilon_s \left(\frac{\tau}{\Delta t} - 0.5\right)}{1 - \epsilon_s + \left(\frac{\tau}{\Delta t} - 0.5\right)} \quad (2.24)$$

où ϵ_s est la fraction volumique occupée par la particule dans le volume de contrôle (voir figure

2.4) :

$$\epsilon_s = \frac{\text{volume particule}}{\text{volume contrôle}} \quad (2.25)$$

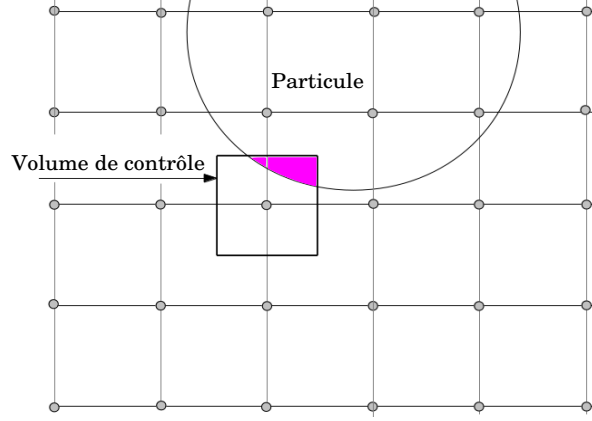


FIGURE 2.4 – Positionnement d'une particule solide par rapport à un volume de contrôle (méthode "immersed moving boundary" [33]).

Ω_α^s permet d'obtenir la condition aux limites de bounce back de Zou et He (1997) [23] :

$$\Omega_\alpha^s = f_{-\alpha}(\mathbf{x}, t) - f_\alpha(\mathbf{x}, t) + f_\alpha^{eq}(\rho, \mathbf{u}_s) - f_{-\alpha}^{eq}(\rho, \mathbf{u}) \quad (2.26)$$

où \mathbf{u}_s est la vitesse de la particule à l'instant $t + \Delta t$, au nœud de coordonnées \mathbf{x} .

Noble et Torczynski ont appliqué cette méthode au calcul de l'écoulement autour d'un cylindre dans un canal, avec des conditions aux limites périodiques à l'entrée et la sortie du canal (soit un écoulement autour d'une ligne de cylindres). Ils ont testé deux cas : un cas où le cylindre a une vitesse uniforme et un cas où la vitesse du cylindre varie sinusoïdalement en fonction du temps. Pour ces deux cas, la vitesse est parallèle aux parois du canal. Ils ont comparé leurs résultats (vitesse, force de traînée) à d'autres résultats qu'ils ont obtenu avec un code de calcul avec les éléments finis. Un bon accord a été observé.

Cette méthode est relativement simple à mettre en œuvre pour des cas bidimensionnels. Cependant, lorsqu'on traite des cas tridimensionnels, il n'est pas aisé de calculer la fraction volumique occupée par le solide dans un volume de contrôle. De plus, cette méthode possède des limitations car elle est construite par rapport à l'équation de lattice Boltzmann avec un terme de collision BGK, et elle n'est pas extensible à d'autres termes de collision plus complexes.

2.4 Méthode des frontières immergées

La méthode des frontières immergées permet de modéliser des écoulements autour de solides déformables. Dans cette méthode, l'écoulement du fluide est calculé avec une approche eulérienne, sur un maillage cartésien fixe. Le contour du solide (la frontière immergée) est suivi avec une approche lagrangienne. Le passage du fluide au contour du solide, et du contour du solide au fluide est réalisé avec une distribution de Dirac. Dans les années 1970, Peskin fut le premier à mettre en œuvre cette méthode pour simuler l'écoulement du sang dans le cœur [39, 40].

2.4.1 Équations relatives à la méthode des frontières immergées

Pour établir les équations du mouvement d'une paroi élastique dans un fluide incompressible newtonien, Peskin [41] a tout d'abord développé, en variables eulériennes, les équations du mouvement d'un matériau visco-élastique incompressible. Il a ainsi obtenu les équations suivantes :

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) + \nabla p = \mu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f} \quad (2.27)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.28)$$

avec les équations d'interaction :

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \int_{\Omega_M} M(q, r, s) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(q, r, s, t)) dq dr ds \quad (2.29)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \int_{\Omega_M} \mathbf{F}(q, r, s, t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(q, r, s, t)) dq dr ds \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial \mathbf{X}(q, r, s, t)}{\partial t} = \mathbf{u}(\mathbf{X}(q, r, s, t)) \quad (2.31)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}(q, r, s, t)) = \int_{\Omega_M} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(q, r, s, t)) d\mathbf{x} \quad (2.32)$$

$$\mathbf{F} = - \frac{\partial E}{\partial \mathbf{X}} \quad (2.33)$$

où Ω_M est le domaine occupé par le matériau à l'instant t , q, r, s désignent les coordonnées curvilignes d'un point du matériau, $\mathbf{X}(q, r, s, t)$ est la position correspondante de ce point, en coordonnées cartésiennes, $M(q, r, s)$ est la densité de masse du matériau ($\int_{\Omega_M} M(q, r, s) dq dr ds$ est la masse de matériau occupant le domaine Ω_M), $\mathbf{F}(q, r, s, t)$ est la densité de la force générée par l'élasticité du matériau, E est l'énergie élastique à l'intérieur du matériau à l'instant t . $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, $\rho(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ sont, en variables eulériennes, la vitesse, la densité massique, la densité de la force élastique (force par unité de volume) en un point du matériau de coordonnées cartésiennes \mathbf{x} , à l'instant t . μ est la viscosité dynamique et p est la pression, $\delta(\mathbf{x})$ est la distribution de Dirac appliquée à un espace tridimensionnel.

En considérant ensuite un matériau élastique, délimité par une surface Γ fermée, de masse très faible (nulle) dans un écoulement newtonien incompressible, Peskin [41], [42] a proposé de garder les équations (2.27) et (2.28) (car elles décrivent le mouvement du fluide incompressible en la présence du matériau visco-élastique), et de modifier les équations d'interaction de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{x}, t) &= \rho_0 + \int_{\Gamma} M(r, s) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(r, s, t)) dr ds \\ &= \rho_0 \text{ si la masse de la surface est nulle} \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \int_{\Gamma} \mathbf{F}(r, s, t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(r, s, t)) dr ds \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial \mathbf{X}(r, s, t)}{\partial t} = \mathbf{u}(\mathbf{X}(r, s, t)) = \int_{\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(r, s, t)) d\mathbf{x} \quad (2.36)$$

où Ω est le domaine fluide, dans lequel est contenue la surface Γ (voir figure 2.5). Dans ces équations, on peut remarquer la distribution de Dirac qui est écrite pour un espace tridimensionnel,

mais dans les expressions de la densité de masse (2.34) et de la force (2.35), l'intégrale s'applique à la surface Γ , et elle est bidimensionnelle. Avec les équations (2.34) et (2.35), on répand sur le domaine eulérien fluide, la densité de masse et la force connues sur la frontière. Avec l'équation (2.36), on interpole sur la frontière Γ la vitesse calculée dans le domaine eulérien fluide. Avec cette méthode, la force exercée par le fluide sur le domaine solide peut se calculer avec [42] :

$$\mathbf{F}_{ib} = - \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = - \int_{\Gamma} \mathbf{F}(r, s, t) dr ds \quad (2.37)$$

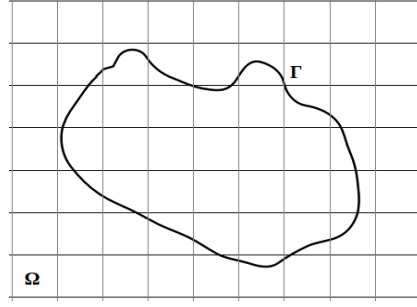


FIGURE 2.5 – Représentation d'une frontière immergée dans un fluide

Les équations (2.27), (2.28), (2.34), (2.35), (2.36), (2.33) peuvent être résolues numériquement avec des méthodes classiques (différences finies [42], volumes finis [43]) ou aussi avec la méthode de lattice Boltzmann. Pour cela, on doit approximer la distribution de Dirac (que l'on notera $\delta_h(\mathbf{x})$).

Avec la distribution de Dirac approximée, on doit pouvoir conserver la forme de la force et de son moment (on considère que la masse de la surface de l'obstacle est nulle) dans le domaine fluide et sur la surface de l'obstacle [41] :

$$\sum_{\mathbf{x} \in g_h} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) h^3 = \sum_{r, s \in G_h} \mathbf{F}(r, s, t) \Delta r \Delta s \quad (2.38)$$

$$\sum_{\mathbf{x} \in g_h} \mathbf{x} \wedge \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) h^3 = \sum_{r, s \in G_h} \mathbf{X}(r, s, t) \wedge \mathbf{F}(r, s, t) \Delta r \Delta s \quad (2.39)$$

où g_h représente le maillage régulier eulérien dont les noeuds fluides font partie (noeuds de coordonnées $\mathbf{x} = \mathbf{j}h$ avec $\mathbf{j} = (j_x, j_y, j_z)$, où j_x, j_y, j_z sont des entiers) et G_h correspond au maillage lagrangien, dans lequel sont situés les noeuds de la surface de l'obstacle (noeuds de coordonnées $(r, s) = (k_r \Delta r, k_s \Delta s)$ où k_r et k_s sont des entiers). Ceci implique que l'approximation de la distribution de Dirac doit respecter :

$$\sum_{\mathbf{x} \in g_h} \delta_h(\mathbf{x} - \mathbf{X}) h^3 = 1 \quad (2.40)$$

$$\sum_{\mathbf{x} \in g_h} (\mathbf{x} - \mathbf{X}) \delta_h(\mathbf{x} - \mathbf{X}) h^3 = \mathbf{0} \quad (2.41)$$

Pour trouver l'expression de l'approximation de la distribution de Dirac, Peskin [41] a proposé la décomposition suivante :

$$\delta_h(\mathbf{x} - \mathbf{X}) = \frac{1}{h^3} \phi\left(\frac{x - X}{h}\right) \phi\left(\frac{y - Y}{h}\right) \phi\left(\frac{z - Z}{h}\right) \quad (2.42)$$

Avec cette décomposition, on cherche une fonction unidimensionnelle $\phi(r)$, ($r = \frac{x-X}{h}$ ou $\frac{y-Y}{h}$ ou $\frac{z-Z}{h}$), qui respecte les propriétés suivantes :

1. $\phi(r)$ est continue $\forall r \in \mathbb{R}$
2. $\phi(r) = 0$ pour $|r| \geq 2$
3. $\sum_{j \text{ pair}} \phi(r-j) = \sum_{j \text{ impair}} \phi(r-j) = \frac{1}{2} \forall r \in \mathbb{R}$
4. $\sum_j (r-j)\phi(r-j) = 0 \forall r \in \mathbb{R}$
5. $\sum_j (\phi(r-j))^2 = C \forall r \in \mathbb{R}$

où C est une constante et j est un entier. La propriété 1 garantit qu'il n'y a pas de saut au niveau de la vitesse et de la force suite aux opérations de distribution et d'interpolation, définies dans les équations (2.35) et (2.36). La propriété 2 permet d'appliquer les opérations de distribution et d'interpolation seulement aux noeuds voisins de la surface de l'obstacle, et ainsi d'économiser le temps de calcul. La propriété 3 est issue de la condition (2.40), et du choix, fait par Peskin, pour l'approximation numérique (schéma centré, maillage non décalé de pression et de vitesse) de ∇p et de $\nabla \cdot \mathbf{u}$ dans les équations (2.27) et (2.28). Cette propriété permet de s'assurer que le poids des noeuds eulériens est le même sur chaque noeud lagrangien, et inversement, au moment de la distribution et de l'interpolation. La propriété 4 permet de respecter la condition (2.41). La propriété 5 permet de vérifier que l'influence de la force exercée par un point de la frontière immergée sur le maillage eulérien est la même quelle que soit la position de la frontière immergée par rapport au maillage eulérien (pour plus d'explications, voir [41]).

Avec ces conditions, Peskin [41] a obtenu l'approximation de la distribution de Dirac suivante :

$$\begin{aligned} \phi(r) &= \frac{1}{8} \left(5 - 2|r| - \sqrt{-7 + 12|r| - 4|r|^2} \right) & 1 \leq |r| \leq 2 \\ &= \frac{1}{8} \left(3 - 2|r| + \sqrt{1 + 4|r| - 4|r|^2} \right) & 0 \leq |r| \leq 1 \\ &= 0 & |r| \geq 2 \end{aligned} \quad (2.43)$$

Cette approximation donne des résultats similaires à une formulation qui est basée sur la fonction cosinus :

$$\begin{aligned} \phi(r) &= \frac{1}{4} \left(1 + \cos \left(\frac{\pi r}{2} \right) \right) & |r| \leq 2 \\ &= 0 & |r| \geq 2 \end{aligned} \quad (2.44)$$

Il existe d'autres approximations pour la distribution de Dirac. Ainsi, Roma et al. [44], qui ont développé la méthode des frontières immergées avec une résolution des équations (2.27) et (2.28) par la méthode des différences finies sur un maillage décalé de pression et de vitesse, ont pu trouver une approximation de la distribution de Dirac qui s'applique sur un intervalle plus étroit que dans [41] :

- $\phi(r) = 0$ pour $|r| \geq 1.5$

De plus, ils ont aussi pu utiliser une condition moins forte pour la propriété (3) que dans [41] :

- $\sum_j \phi(r-j) = 1 \quad \forall r \in \mathbb{R}$

Ceci leur a permis d'obtenir la forme suivante pour l'approximation de la distribution de Dirac :

$$\begin{aligned}\phi(r) &= \frac{1}{6} \left(5 - 3|r| - \sqrt{-3(1-|r|)^2 + 1} \right) \quad 0.5 \leq |r| \leq 1.5 \\ &= \frac{1}{3} \left(\sqrt{-3|r|^2 + 1} \right) \quad |r| \leq 0.5 \\ &= 0 \quad |r| \geq 1.5\end{aligned}\tag{2.45}$$

Sur la figure suivante 2.6, nous représentons les différentes approximations de la distribution de Dirac que nous venons de détailler.

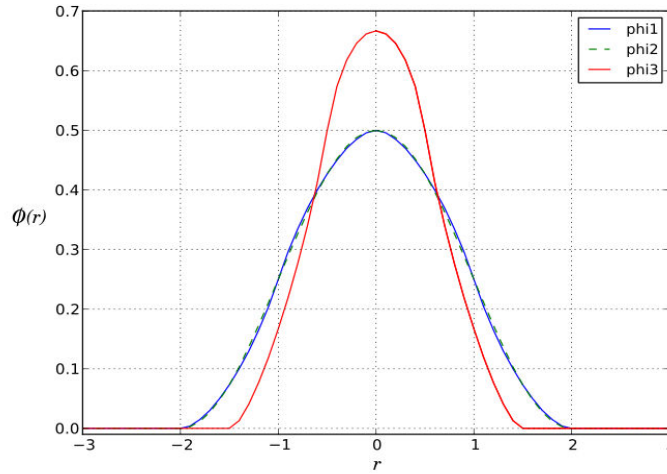


FIGURE 2.6 – Représentation graphique de l'approximation de la fonction de Dirac (phi1 : voir équation 2.43, phi2 : voir équation 2.44, phi3 : voir équation 2.45).

2.4.2 Méthode des frontières immergées combinée avec la LBM

2.4.2.1 Méthode classique de Peskin combinée avec la LBM

Alors que la méthode des frontières immergées a été mise en oeuvre pour des matériaux élastiques, il n'est pas aisé d'appliquer cette méthode à des solides indéformables. Pour contourner ce problème, Lai et Peskin (2000) [42], ont proposé de considérer que la frontière est attachée à un endroit de référence grâce à un ressort exerçant une force de rappel. Ainsi, si on considère un écoulement bidimensionnel contenant une frontière immergée Γ unidimensionnelle, nous avons :

$$\mathbf{F}(s, t) = -k(\mathbf{X}(s, t) - \mathbf{X}(s, t)^r)\tag{2.46}$$

où k est la constante du ressort, $\mathbf{X}(s, t)^r$ est la position de référence correspondant au nœud de coordonnée $\mathbf{X}(s, t)$. Le coefficient k doit être élevé, de sorte que la force de rappel oblige le nœud de la frontière immergée de coordonnées $\mathbf{X}(s, t)$ à être très proche du point de référence de coordonnées $\mathbf{X}(s, t)^r$. Le mouvement du point du référence est tel que la frontière immergée du domaine solide ne se déforme pas. Ainsi, si on considère la figure 2.7, la distance entre le centre de gravité P du solide et la frontière du solide ne peut pas changer entre deux instants, seul un mouvement de rotation entre ces deux instants est possible, on peut donc écrire :

$$\mathbf{X}(s, t)^r = \mathbf{X}_p(t) + R(t) (\mathbf{X}(s, 0)^r - \mathbf{X}_p(0))\tag{2.47}$$

où $R(t)$ est la matrice de rotation du solide.

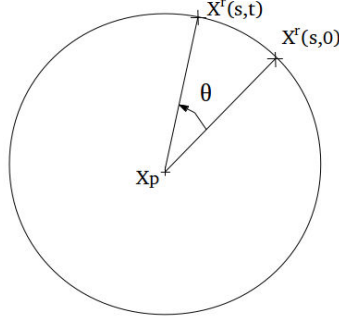


FIGURE 2.7 – Déplacement des points de référence sur la frontière d'un solide.

Feng et Michaelides en 2004 [45], ont été les premiers à combiner la méthode des frontières immergées et la méthode de lattice Boltzmann. Leur application a porté sur la sédimentation de particules solides pouvant entrer en collision les unes par rapport aux autres, dans un fluide (calcul bidimensionnel). Ils ont utilisé pour cela le modèle $D2Q9$ et l'équation de lattice Boltzmann avec un terme source (afin de prendre en compte la force exercée par la frontière immergée sur le fluide) :

$$f_\alpha(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}_\alpha \Delta t, t + \Delta t) - f_\alpha(\mathbf{x}, t) = -\frac{\Delta t}{\tau} [f_\alpha(\mathbf{x}, t) - f_\alpha^{eq}(\mathbf{x}, t)] + \Delta t F_\alpha \quad (2.48)$$

Avec F_α donné par :

$$F_\alpha = \frac{3}{2} \omega_\alpha \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\xi}_\alpha \quad (2.49)$$

L'équation 2.48 est résolue sur un maillage eulérien régulier, \mathbf{f} est la force exercée par la frontière immergée sur le fluide, sur les noeuds du maillage eulérien. $\mathbf{F}(s, t)$ (cf équation 2.46) a donc été distribuée sur le maillage eulérien grâce à l'équation d'interaction 2.35. Si on nomme l un noeud de la frontière immergée (voir figure 2.8), l'équation d'interaction 2.35 discrétisée est :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \sum_{l=1}^m \mathbf{F}(\mathbf{X}_l, t) \delta_h(\mathbf{x} - \mathbf{X}_l) \Delta s \quad \forall \mathbf{x} \in g_h \quad (2.50)$$

où m est le nombre de noeuds de la frontière immergée, et :

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}_l, t) = -k(\mathbf{X}_l - \mathbf{X}_l^r) \quad (2.51)$$

Feng et Michaelides ont approximé la distribution de Dirac en utilisant une fonction en cosinus (voir équation 2.44). L'équation de lattice Boltzmann 2.48 résolue permet ensuite de calculer la vitesse du fluide sur les noeuds du domaine eulérien :

$$\rho = \sum_{\alpha} f_{\alpha} \quad \rho \mathbf{u} = \sum_{\alpha} f_{\alpha} \boldsymbol{\xi}_{\alpha} \quad (2.52)$$

Puis la vitesse \mathbf{u} est interpolée sur les noeuds de la frontière immergée avec l'équation 2.36 discrétisée :

$$\mathbf{U}(\mathbf{X}_l, t + \Delta t) = \sum_{\mathbf{x} \in g_h} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t + \Delta t) \delta_h(\mathbf{x} - \mathbf{X}_l) h^2 \quad (2.53)$$

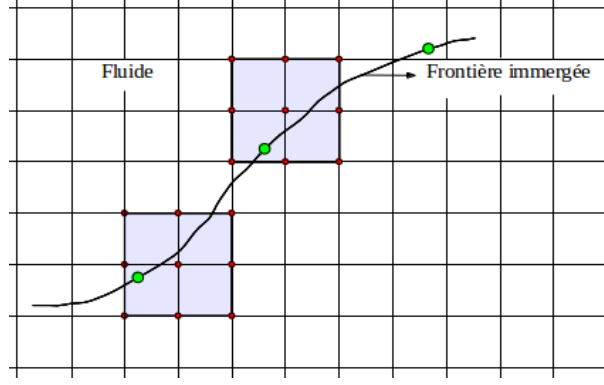


FIGURE 2.8 – Domaines lagrangien et eulérien dans la méthode des frontières immergées.

Connaissant la vitesse $\mathbf{U}(\mathbf{X}_l, t + \Delta t)$ de chaque point de la frontière immergée, on peut déduire la position de chacun de ces points en intégrant temporellement l'équation 2.36.

Feng et Michaelides ont appliqué cette méthode à des cas tests, notamment à celui de la sédimentation de deux particules de forme circulaire entre deux plaques verticales. Ils ont obtenu des résultats satisfaisants par rapport à d'autres résultats numériques obtenus avec la méthode des multiplicateurs de Lagrange et des domaines fictifs (Patankar et al (2000) [46]). Cependant, en faisant varier la valeur du coefficient k , ils ont remarqué que quand k n'est pas assez grand, les résultats dépendent de k . De plus, lorsque k est élevé, il s'ensuit des problèmes de stabilité lorsqu'on résout les équations du fluide ; ce problème a été aussi constaté par d'autres auteurs qui ont utilisé des méthodes classiques pour résoudre les équations de Navier-Stokes. Afin de s'affranchir de ce problème rencontré dans le calcul d'écoulements autour de solides rigides, d'autres méthodes comme la méthode "direct forcing" ont été mises en oeuvre pour calculer la force exercée par la frontière immergée sur le fluide.

2.4.2.2 Méthode "direct forcing" appliquée à la LBM

Dans cette méthode développée d'abord par Mohd-Yusof (1997) [47], puis par Fadlun et al. (2000) [48], dans le contexte d'une résolution des équations de Navier-Stokes par la méthode des différences finies, l'expression de la force exercée par la frontière immergée sur le fluide est obtenue en raisonnant sur la discrétisation temporelle des équations de Navier-Stokes.

Partons des équations de Navier-Stokes écrites sans la présence de la force :

$$\frac{\mathbf{u}^*(\mathbf{x}, t + \Delta t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\Delta t} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{u} = RHS \quad (2.54)$$

où \mathbf{u}^* est la vitesse du fluide en l'absence de la force relative à la frontière immergée. Si on écrit les équations de Navier-Stokes avec la force due à la présence de la frontière immergée, on a :

$$\frac{\mathbf{u}^{(d)}(\mathbf{x}, t + \Delta t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\Delta t} = RHS + \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \quad (2.55)$$

où $\mathbf{g} = \frac{\mathbf{f}}{\rho}$ (\mathbf{f} étant la force exercée par la frontière immergée sur le fluide, présentée dans les paragraphes précédents), et $\mathbf{u}^{(d)}(\mathbf{x}, t + \Delta t)$ est la vitesse désirée sur la frontière immergée. Si on soustrait ces deux équations, on obtient l'expression de la force \mathbf{g} (ou \mathbf{f}) au voisinage de la

frontière immergée (cette force est nulle loin de la frontière immergée) :

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mathbf{u}^{(d)}(\mathbf{x}, t + \Delta t) - \mathbf{u}^*(\mathbf{x}, t + \Delta t)}{\Delta t} \quad (2.56)$$

Dupuis et al (2008) [49] ont modélisé avec cette méthode des écoulements autour d'obstacles, en utilisant la méthode de lattice Boltzmann pour calculer l'écoulement fluide. Pour calculer la force exercée par la frontière immergée sur le fluide, ils ont testé une méthode basée sur l'approximation de la distribution de Dirac, et une méthode basée sur des interpolations.

A. Méthode basée sur l'approximation de la distribution de Dirac

Avec cette méthode, on travaille au niveau de la frontière immergée. La force exercée par la frontière immergée sur le fluide est calculée avec l'expression 2.56, ce qui donne pour un noeud l de la frontière immergée [50] :

$$\mathbf{G}(\mathbf{X}_l, t) = \frac{\mathbf{U}^{(d)}(\mathbf{X}_l, t + \Delta t) - \mathbf{U}^*(\mathbf{X}_l, t + \Delta t)}{\Delta t} \quad (2.57)$$

Dans cette équation, $\mathbf{U}^{(d)}(\mathbf{X}_l, t + \Delta t)$ est la vitesse voulue sur la frontière immergée (nulle dans les travaux de Dupuis et al., qui ont modélisé des écoulements autour d'obstacles immobiles), $\mathbf{U}^*(\mathbf{X}_l, t + \Delta t)$ est déduite de la vitesse qui a été déterminée préalablement avec l'équation de lattice Boltzmann sans la force (obtention de la vitesse \mathbf{u}^* sur le maillage eulérien fluide) :

$$f_\alpha(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}_\alpha \Delta t, t + \Delta t) - f_\alpha(\mathbf{x}, t) = -\frac{\Delta t}{\tau} [f_\alpha(\mathbf{x}, t) - f_\alpha^{eq}(\mathbf{x}, t)] \quad (2.58)$$

$$\rho = \sum_\alpha f_\alpha \quad , \quad \rho \mathbf{u}^* = \sum_\alpha f_\alpha \boldsymbol{\xi}_\alpha \quad (2.59)$$

Comme la vitesse \mathbf{u}^* a été calculée sur le maillage eulérien, on déduit cette vitesse sur la frontière immergée en interpolant avec l'approximation de la distribution de Dirac :

$$\mathbf{U}^*(\mathbf{X}_l, t + \Delta t) = \sum_{\mathbf{x} \in g_h} \mathbf{u}^*(\mathbf{x}, t + \Delta t) \delta_h(\mathbf{x} - \mathbf{X}_l) h^2 \quad (2.60)$$

La force $\mathbf{G}(\mathbf{X}_l, t)$ calculée selon 2.57 est ensuite distribuée sur les nœuds eulériens fluides voisins des nœuds lagrangiens de la frontière immergée, grâce à l'approximation de la distribution de Dirac :

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) = \sum_{l=1}^m \mathbf{G}(\mathbf{X}_l, t) \delta_h(\mathbf{x} - \mathbf{X}_l) \Delta s \quad \forall \mathbf{x} \in g_h \quad (2.61)$$

Après cette opération, on résout une deuxième fois l'équation de lattice Boltzmann, mais cette fois-ci avec la force due à la présence de la frontière immergée :

$$f_\alpha(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}_\alpha \Delta t, t + \Delta t) - f_\alpha(\mathbf{x}, t) = -\frac{\Delta t}{\tau} [f_\alpha(\mathbf{x}, t) - f_\alpha^{eq}(\mathbf{x}, t)] + \Delta t F_\alpha \quad (2.62)$$

où pour F_α , Dupuis et al ont choisi l'expression suivante :

$$F_\alpha = \rho \omega_\alpha \boldsymbol{\xi}_\alpha \cdot \mathbf{g} / c_s^2 \quad (2.63)$$

Ils ont ensuite déduit la vitesse du fluide :

$$\rho \mathbf{u} = \sum_{\alpha} f_{\alpha} \boldsymbol{\xi}_{\alpha} \quad (2.64)$$

Notons que Guo et al. [51], ont montré que cette expression de la force induit des termes non physiques dans l'équation de Navier-Stokes. Dupuis et al [49]. ont mentionné qu'ils ont aussi appliqué la formulation proposée par Guo et al., qui permet d'éviter ces termes non voulus, et qu'ils n'ont pas constaté de différences significatives au niveau de leurs résultats. Notons de plus que Dupuis et al. ont utilisé pour l'approximation de la distribution de Dirac, une fonction en cosinus (voir équation 2.44).

B. Méthode basée sur des interpolations

Dans cette méthode, la force exercée par la frontière immergée sur le fluide est évaluée au voisinage de la frontière immergée. Cette force est calculée avec l'expression 2.56. Des interpolations sont réalisées pour évaluer $\mathbf{u}^{(d)n+1}$ sur les nœuds eulériens (Fadlun et al. [48]). Dupuis et al. ont suivi cette approche, et ont utilisé des interpolations linéaires. Par exemple, en un point dénommé 1 sur la figure 2.9, on aura :

$$u_1^{(d)} = \frac{u_0^{(d)} \Delta x + u_2^* d}{d + \Delta x} \quad (2.65)$$

où u_0^d est la composante, suivant la direction x , de la vitesse au point 0 de la frontière immergée, u_2^* est la composante, suivant la direction x , de la vitesse du fluide au point 2 (point non influencé par la présence de la frontière immergée), u_1^d est la vitesse interpolée, d est la distance entre les nœuds 0 et 1, et Δx est la distance entre les points 1 et 2.

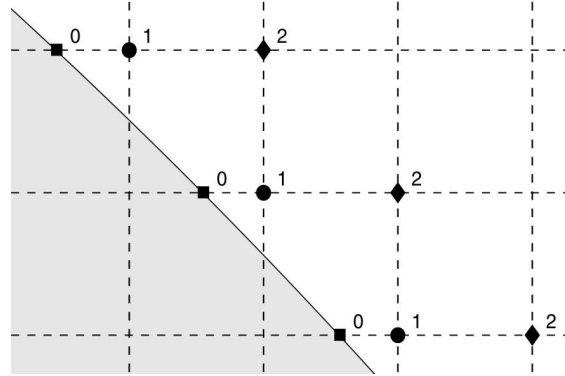


FIGURE 2.9 – Illustration de l'interpolation linéaire entre la vitesse sur les points de la frontière immergée, et la vitesse dans le fluide (Dupuis et al. [49])

Avec ces deux méthodes, Dupuis et al. [49] ont calculé un écoulement autour d'un cylindre immobile. Pour de faibles nombres de Reynolds ($Re = 40$), ils ont comparé leurs résultats à des résultats numériques obtenus par Li et al. (2004) [52] avec la méthode de lattice Boltzmann et le bounce back pour modéliser les conditions aux limites de vitesses au niveau des frontières du cylindre, et ils ont constaté que la méthode basée sur l'utilisation de la distribution de Dirac approximée donne des résultats moins satisfaisants que la méthode basée sur les interpolations. De plus, ils ont fait des calculs avec les deux méthodes pour des nombres de Reynolds plus élevés ($Re = 200$ notamment). Ils ont comparé les champs de vitesse et de vorticité au voisinage de l'obstacle et ils ont constaté des différences dans les zones de faibles vitesses. Ils ont expliqué

les différences de comportement entre les deux méthodes par le fait que l'approximation de la fonction de Dirac atténue l'influence de la frontière immergée sur les nœuds fluides voisins de l'obstacle. De plus, concernant la méthode utilisant des interpolations, on peut se demander si le choix d'une interpolation linéaire pour évaluer la vitesse due à l'influence de la frontière immergée sur les nœuds fluides voisins est pertinent.

Pour finir sur cette méthode, on peut remarquer qu'elle nécessite un effort en temps de calcul non négligeable car elle nécessite de faire un calcul avec deux pas de temps successifs (un pour la vitesse prédite \mathbf{u}^* et un pour la vitesse corrigée \mathbf{u}).

2.4.2.3 Méthode "momentum exchange" appliquée à la technique des frontières immergées

Avant les travaux de Dupuis et al. (2008) [49], quelques équipes avaient essayé d'utiliser la méthode "direct forcing" des frontières immergées conjointement avec la méthode de lattice Boltzmann. Cependant pour calculer la force exercée par la frontière immergée sur les nœuds fluides, ils passaient par les équations de Navier-Stokes discrétisées avec la méthode des différences finies (Feng et Michaelides (2005) [53], Peng et al (2006) [54]). Pour contourner ce problème, Niu et al. (2006) [55] ont proposé d'utiliser la méthode "momentum exchange", propre à la méthode lattice Boltzmann, pour déterminer la force exercée par la frontière immergée sur les nœuds eulériens fluides, dans le cadre de la méthode des frontières immergées (cette méthode a été présentée dans le paragraphe concernant le bounce back).

Lorsqu'on emploie la méthode "momentum exchange" pour calculer une force exercée par la surface d'un obstacle sur le fluide, on se base sur les fonctions de distribution $f_\alpha(\mathbf{x}, t)$ sur les nœuds du domaine de calcul (Ladd (1994)[34]). Dans la méthode proposée par Niu et al. (2006) [55], les fonctions de distribution $f_\alpha(\mathbf{x}, t)$ sont interpolées avec des polynômes de Lagrange sur les nœuds lagrangiens de la frontière immergée. Niu et al. ont étendu la formule du bounce back développée par Ladd (1994) sur un maillage cartésien, aux nœuds lagrangiens de la frontière immergée :

$$f_{\bar{\alpha}}(\mathbf{X}_l, t) = f_\alpha(\mathbf{X}_l, t) - 2\omega_\alpha \rho \frac{\boldsymbol{\xi}_\alpha \cdot \mathbf{U}^{(d)}(\mathbf{X}_l, t)}{c_s^2} \quad (2.66)$$

où $\mathbf{U}^{(d)}(\mathbf{X}_l, t)$ est la vitesse de la frontière immergée, $\bar{\alpha}$ est la direction opposée à α ($\boldsymbol{\xi}_{\bar{\alpha}} = -\boldsymbol{\xi}_\alpha$), $f_\alpha(\mathbf{X}_l, t)$ est la fonction de distribution $f_\alpha(\mathbf{x}, t)$ interpolée sur le nœud l de la frontière immergée. La force exercée par l'obstacle (la frontière immergée) sur le fluide est déduite de la méthode momentum exchange (Ladd (1994)) :

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}_l, t) = \sum_{\beta} \boldsymbol{\xi}_{\bar{\beta}} (f_{\bar{\beta}}(\mathbf{X}_l, t) - f_{\beta}(\mathbf{X}_l, t)) \quad (2.67)$$

Cette force est propagée sur les nœuds eulériens voisins de chaque nœud lagrangien en utilisant l'approximation de la distribution de Dirac :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \sum_{l=1}^m \mathbf{F}(\mathbf{X}_l, t) \delta_h(\mathbf{x} - \mathbf{X}_l) \Delta s \quad (2.68)$$

où pour l'approximation de la distribution de Dirac, Niu et al. ont choisi une fonction en cosinus (voir équation 2.44). Pour mettre en œuvre cette méthode dans le cadre d'une résolution de l'écoulement avec la méthode de lattice Boltzmann, Niu et al. ont effectué des calculs bidimen-

sionnels, et ont choisi un schéma MRT (Multi Relaxation Time) pour le terme de collision. Ce schéma est en effet plus stable que le modèle BGK (D'Humières et al. (2002)) [56]. Niu et al. [55] ont modélisé plusieurs cas tests (écoulement autour de cylindres immobiles à des faibles nombres de Reynolds, mise en mouvement d'une particule circulaire dans un écoulement cisailé dans un canal, sédimentation de deux particules circulaires dans un canal vertical). Ils ont comparé leurs résultats notamment avec ceux de Feng et Michaelides (2004) [45], qui utilisaient la méthode classique des frontières immergées avec résolution de l'écoulement fluide avec la LBM, et ont constaté un bon accord. Cependant, cette méthode n'améliorait pas les résultats, notamment le champ de vitesses à l'intérieur de l'obstacle qui était légèrement différent de la vitesse de l'obstacle (condition de non glissement non vérifiée).

2.4.2.4 Méthode avec correction de vitesse

Avec les méthodes présentées précédemment, la force exercée par la frontière immergée sur le fluide est calculée de façon explicite. Connaissant cette force on obtient le champ de vitesses sur les nœuds eulériens en résolvant les équations relatives à l'écoulement fluide, puis on interpole le champ de vitesses obtenues sur les nœuds lagrangiens de la frontière immergée (dans le cas de la méthode basée sur l'approximation de la distribution de Dirac). Avec ces méthodes, la vitesse ainsi obtenue n'est pas forcément égale à celle du solide, ce qui peut provoquer une pénétration du fluide dans l'obstacle.

Pour corriger ce problème Wu et Shu [57] ont développé une méthode implicite de correction des vitesses permettant d'obtenir au niveau de la frontière immergée, la vitesse du solide. Pour cela, ils se sont basés sur l'expression de la force discrétisée obtenue par Guo et al. (2002) [51], qui permet d'éviter l'apparition de termes non physiques dans les équations de Navier-Stokes. Le modèle proposé par Guo et al. est le suivant :

$$f_\alpha(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}_\alpha \Delta t, t + \Delta t) - f_\alpha(\mathbf{x}, t) = -\frac{\Delta t}{\tau} [f_\alpha(\mathbf{x}, t) - f_\alpha^{eq}(\mathbf{x}, t)] + \Delta t F_\alpha \quad (2.69)$$

avec :

$$F_\alpha = (1 - \frac{1}{2\tau}) \omega_\alpha \left[\frac{(\boldsymbol{\xi}_\alpha - \mathbf{u})}{c_s^2} + \frac{(\boldsymbol{\xi}_\alpha \cdot \mathbf{u})}{c_s^4} \boldsymbol{\xi}_\alpha \right] \cdot \mathbf{f} \quad (2.70)$$

et :

$$\rho \mathbf{u} = \sum_\alpha \boldsymbol{\xi}_\alpha f_\alpha + \frac{1}{2} \Delta t \mathbf{f} \quad (2.71)$$

Dans l'expression précédente, on voit que la quantité de mouvement se décompose en un terme dépendant des fonctions de distribution f_α , et un terme dépendant de la force \mathbf{f} . Wu et Shu [57], ont proposé de décomposer la vitesse \mathbf{u} en une vitesse \mathbf{u}^{**} calculée à partir des fonctions de distribution f_α :

$$\rho \mathbf{u}^{**} = \sum_\alpha \boldsymbol{\xi}_\alpha f_\alpha \quad (2.72)$$

et une correction de vitesse \mathbf{u}' dépendant de la force \mathbf{f} :

$$\rho \mathbf{u}' = \frac{1}{2} \Delta t \mathbf{f} \quad (2.73)$$

La vitesse du fluide peut être donc exprimée de la manière suivante :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^{**} + \mathbf{u}' \quad (2.74)$$

Dans cette nouvelle méthode, Wu et Shu [57] ont suggéré de considérer la force \mathbf{f} (c'est à dire \mathbf{u}') comme inconnue, et de déterminer \mathbf{u}' de sorte que la vitesse sur les points lagrangiens de la frontière immergée, soit égale à la vitesse du solide.

Sur les nœuds du domaine fluide (dénommés e , voir figure 2.10), la correction de vitesse peut s'écrire (pour un cas bidimensionnel) :

$$\mathbf{u}'(\mathbf{x}_e, t) = \sum_{l=1}^m \mathbf{U}'(\mathbf{X}_l, t) \delta_h(\mathbf{x}_e - \mathbf{X}_l) \Delta s \quad (2.75)$$

où m est le nombre de points de la frontière immergée. La vitesse des nœuds fluides vaut :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}_e, t) = \mathbf{u}^{**}(\mathbf{x}_e, t) + \mathbf{u}'(\mathbf{x}_e, t) \quad (2.76)$$

où \mathbf{u}^{**} est calculée avec l'équation 2.72. On désire que cette vitesse soit égale à la vitesse $\mathbf{U}^{(d)}$ du solide sur les nœuds de la frontière immergée, soit :

$$\mathbf{U}^{(d)}(\mathbf{X}_l, t) = \sum_{e=1}^n [\mathbf{u}^{**}(\mathbf{x}_e, t) + \mathbf{u}'(\mathbf{x}_e, t)] \delta_h(\mathbf{x}_e - \mathbf{X}_l) h^2 \quad (2.77)$$

où n est le nombre de points eulériens fluides entourant l'ensemble des points lagrangiens de la frontière immergée (voir figure 2.10).

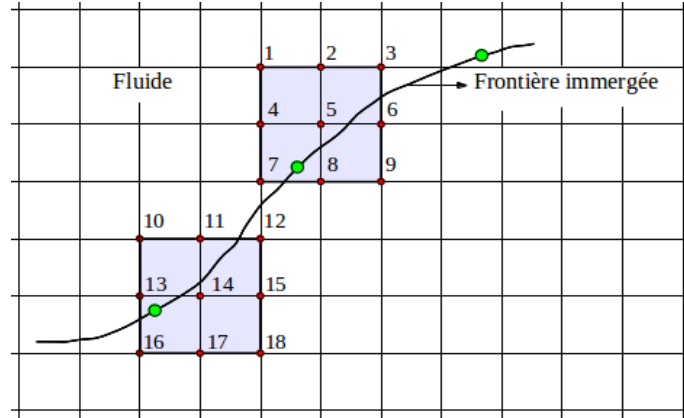


FIGURE 2.10 – Domaines lagrangien et eulérien dans la méthode des frontières immergées

Si on remplace $\mathbf{u}'(\mathbf{x}_e, t)$ par son expression faisant intervenir la correction de vitesse $\mathbf{U}'(\mathbf{X}_l, t)$ sur la frontière immergée (équation 2.75), on obtient le système suivant à résoudre :

$$AX = B \quad (2.78)$$

avec :

$$A = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & . & . & . & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & . & . & . & \delta_{2n} \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ \delta_{m1} & \delta_{m2} & . & . & . & \delta_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{11}^B & \delta_{12}^B & . & . & . & \delta_{1n}^B \\ \delta_{21}^B & \delta_{22}^B & . & . & . & \delta_{2n}^B \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ \delta_{n1}^B & \delta_{n2}^B & . & . & . & \delta_{nm}^B \end{pmatrix}$$

où :

$$\delta_{el} = \delta_h(\mathbf{x}_e - \mathbf{X}_l)h^2 \quad (2.79)$$

et :

$$\delta_{el}^B = \delta_h(\mathbf{x}_e - \mathbf{X}_l)\Delta s \quad (2.80)$$

$$X = (\mathbf{U}'(\mathbf{X}_1, t), \mathbf{U}'(\mathbf{X}_2, t), \dots, \mathbf{U}'(\mathbf{X}_m, t))^t \quad (2.81)$$

$$B = \begin{pmatrix} \mathbf{U}^{(d)}(\mathbf{X}_1, t) \\ \mathbf{U}^{(d)}(\mathbf{X}_2, t) \\ . \\ . \\ . \\ \mathbf{U}^{(d)}(\mathbf{X}_m, t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & . & . & . & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & . & . & . & \delta_{2n} \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ \delta_{m1} & \delta_{m2} & . & . & . & \delta_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}^{**}(\mathbf{x}_1, t) \\ \mathbf{u}^{**}(\mathbf{x}_2, t) \\ . \\ . \\ . \\ \mathbf{u}^{**}(\mathbf{x}_m, t) \end{pmatrix}$$

Une fois la résolution de ce système effectuée, on distribue la vitesse $\mathbf{U}'(\mathbf{X}_l, t)$ calculée sur les points lagrangiens de la frontière immergée, sur les nœuds eulériens qui entourent les points lagrangiens (équation 2.75), et on corrige la vitesse du fluide sur les points eulériens (équation 2.76). Dans cette étude, Wu et Shu ont choisi, pour approximer la distribution de Dirac, une fonction en cosinus (voir équation 2.44).

Pour tester la validité de la méthode, Wu et Shu [57] ont calculé notamment des écoulements autour d'un cylindre, pour plusieurs nombres de Reynolds. Ils ont comparé leurs résultats par rapport à des résultats expérimentaux, et des résultats numériques obtenus sur des maillages structurés (body fitted coordinates), trouvés dans la littérature. Ils ont remarqué des différences au niveau du coefficient de traînée qu'ils ont expliquées avec l'approximation de la distribution de Dirac qui détériore les résultats si elle n'est pas assez précise. Par contre, ils ont montré que par rapport à la méthode "direct forcing" conventionnelle, cette méthode "direct forcing" avec correction de vitesse au niveau de la frontière immergée, évite une pénétration des lignes de courant à l'intérieur du solide (voir figure 2.11) .

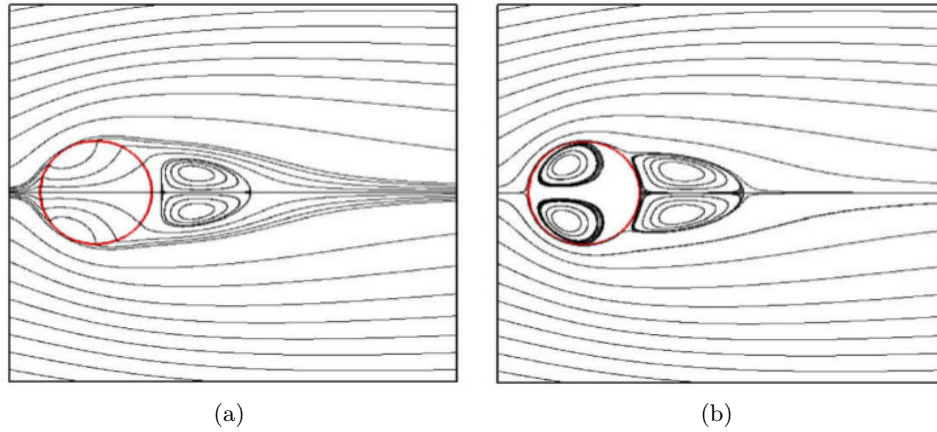


FIGURE 2.11 – Pénétration des lignes de courant à l'intérieur du solide : (a) Méthode des frontières immergées conventionnelle (Feng et Michaelides [53]), (b) Méthode des frontières immergées avec correction de vitesse (Wu et Shu [57])

Pour finir, on peut dire que cette méthode présente un inconvénient, qui est la résolution du système permettant de calculer la correction de vitesse sur la frontière immergée. Cette méthode peut devenir coûteuse si on traite des cas tridimensionnels, avec des obstacles en mouvement (nécessité de résoudre un système à chaque pas de temps). Cependant, le nombre d'inconnues est faible pour des cas bidimensionnels (il y a autant d'inconnues que de points sur la frontière immergée), et a permis aux auteurs qui ont développé cette méthode de résoudre des problèmes bidimensionnels plus complexes, comme le battement d'une aile entre deux plaques horizontales [58].

2.5 Méthode des Multiplicateurs de Lagrange

Parallèlement à la méthode des frontières immergées, la méthode des multiplicateurs de Lagrange a été implémentée avec la méthode de lattice Boltzmann pour modéliser des écoulements autour d'obstacles en mouvement et qui se déforment [59]. Ces auteurs se sont appuyés pour cela sur la formulation multiplicateurs de Lagrange et domaines fictifs développée par Yu en 2005 [60], qui est une extension de la formulation de Glowinski et al (1999) [61] (écoulement autour de solides rigides en mouvement) au cas des écoulements autour de solides déformables. Les équations de départ sont données par [60] :

1. Les équations d'un fluide newtonien incompressible :

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f} \quad \text{sur } \Omega \setminus P(t) \quad (2.82)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{sur } \Omega \setminus P(t) \quad (2.83)$$

avec les conditions aux limites suivantes :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_\Gamma \quad \text{sur } \Gamma \quad (2.84)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_s \quad \text{sur } \partial P \quad (2.85)$$

et la condition initiale :

$$\mathbf{u}(t=0) = \mathbf{u}_0 \quad \text{sur } \Omega \setminus P(t) \quad (2.86)$$

Où Ω désigne l'ensemble des domaines fluide et solide, $P(t)$ est le domaine solide à l'instant t , Γ est le bord du domaine Ω , et ∂P représente le bord du domaine $P(t)$ (voir la figure 2.12).

2. Les équations du solide déformable :

$$\rho_s \frac{d\mathbf{u}_s}{dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_s + \rho_s \mathbf{f}_s \quad \text{sur } P(t) \quad (2.87)$$

$$J\rho_s = \rho_0 \quad \text{sur } P(t) \quad (2.88)$$

avec la condition sur le bord du domaine solide :

$$\boldsymbol{\sigma}_s \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \quad \text{sur } \partial P \quad (2.89)$$

et la condition initiale :

$$\mathbf{u}_s(t=0) = \mathbf{u}_{s0} \quad \text{sur } P(t) \quad (2.90)$$

Dans ces équations, $\frac{d}{dt}$ est la dérivée particulière $\left(\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla\right)$, $\boldsymbol{\sigma}$ et $\boldsymbol{\sigma}_s$ sont les tenseurs des contraintes du fluide et du solide, \mathbf{f} et \mathbf{f}_s sont les forces volumiques dans le fluide et le solide (force de gravité par exemple).

Dans la méthode des domaines fictifs, on étend le domaine comprenant le solide et le fluide avec un domaine plus simple comprenant l'intérieur du solide. Grâce à ce domaine plus simple qui n'évolue pas en fonction du temps, on évite de faire bouger le maillage du domaine de calcul à

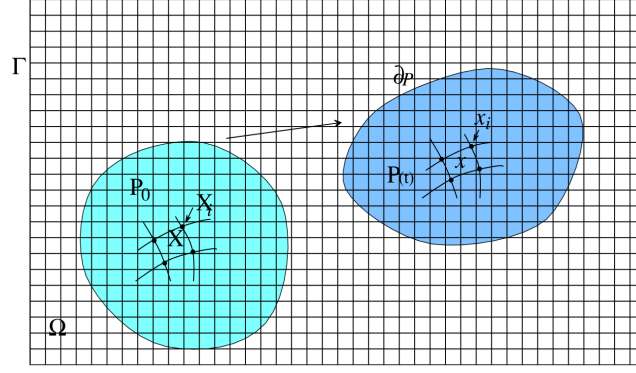


FIGURE 2.12 – Représentation des domaines fluide et solide, dans la méthode des domaines fictifs (cas bidimensionnel) [60]

chaque pas du temps, ce qui permet réduire le temps de calcul.

Cette technique a été développée par des équipes qui utilisent la méthode des éléments finis pour résoudre les équations du fluide et du solide. On commence donc par obtenir une formulation faible des équations combinées du fluide et du solide. On utilise pour cela les espaces combinés suivants¹ :

Espace des vitesses :

$$W_u = \{(\mathbf{u}, \mathbf{u}_s), \mathbf{u} \in H^1(\Omega \setminus P)^2, \mathbf{u}_s \in H^1(P)^2, \mathbf{u} = \mathbf{u}_s \text{ sur } \partial P, \mathbf{u} = \mathbf{u}_\Gamma \text{ sur } \Gamma\} \quad (2.91)$$

Espace des fonctions tests :

$$W_0 = \{(\mathbf{v}, \mathbf{v}_s), \mathbf{v} \in H^1(\Omega \setminus P)^2, \mathbf{v}_s \in H^1(P)^2, \mathbf{v} = \mathbf{v}_s \text{ sur } \partial P, \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma\} \quad (2.92)$$

L'équation combinée est obtenue en effectuant l'opération suivante :

$$\int_{\Omega \setminus P} (Eq \text{ 2.82}) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_P (Eq \text{ 2.87}) \cdot \mathbf{v}_s \, d\mathbf{x} \quad (2.93)$$

Ceci donne :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \setminus P} \left(\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} - \rho \mathbf{f} \right) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega \setminus P} \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_P \left(\rho_s \frac{d\mathbf{u}_s}{dt} - \rho_s \mathbf{f}_s \right) \cdot \mathbf{v}_s \, d\mathbf{x} + \\ \int_P \boldsymbol{\sigma}_s : \nabla \mathbf{v}_s \, d\mathbf{x} = 0 \quad \forall (\mathbf{v}, \mathbf{v}_s) \in W_0 \end{aligned} \quad (2.94)$$

La pression du fluide p appartient à l'espace suivant :

$$W_p = \left\{ q \in L^2(\Omega \setminus P), \int_{\Omega \setminus P} q \, d\mathbf{x} = 0 \right\} \quad (2.95)$$

1. Si Ω est un ouvert de \mathbb{R}^d , $H^1(\Omega)$ est un espace qui vérifie :
 $H^1(\Omega) = \{\mathbf{u} \in L^2(\Omega), \text{ tel que } \forall i = 1, 2, \dots, d : \frac{d\mathbf{u}}{dx_i} \in L^2(\Omega)\}$

La formulation faible de l'équation de continuité du fluide est :

$$\int_{\Omega \setminus P} q \nabla \cdot \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = 0 \quad \forall q \in W_p \quad (2.96)$$

L'étape suivante est d'écrire l'équation combinée du fluide et du solide sur l'ensemble du domaine Ω . Pour cela, on obtient d'abord une équation combinée à l'intérieur du domaine solide. Les vitesses \mathbf{u} et \mathbf{u}_s ne sont plus couplées seulement sur le bord du domaine solide, mais elles sont couplées sur l'ensemble du domaine solide. L'espace combiné des vitesses est donc :

$$\widetilde{W}_u = \{(\mathbf{u}, \mathbf{u}_s), \mathbf{u} \in H^1(\Omega)^2, \mathbf{u}_s \in H^1(P)^2, \mathbf{u} = \mathbf{u}_s \text{ sur } P, \mathbf{u} = \mathbf{u}_\Gamma \text{ sur } \Gamma\} \quad (2.97)$$

L'espace combiné des fonctions tests est :

$$\widetilde{W}_0 = \{(\mathbf{v}, \mathbf{v}_s), \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^2, \mathbf{v}_s \in H^1(P)^2, \mathbf{v} = \mathbf{v}_s \text{ sur } P, \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma\} \quad (2.98)$$

Avec ceci, on peut former une équation combinée sur le solide P qu'on additionnera ensuite à l'équation combinée 2.94 pour avoir l'équation sur tout le domaine Ω . L'équation de quantité de mouvement combinée sur le domaine solide P est :

$$\int_P \left(\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} - \rho \mathbf{f} \right) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_s) \, d\mathbf{x} + \int_P \boldsymbol{\sigma}_f : \nabla (\mathbf{v} - \mathbf{v}_s) \, d\mathbf{x} = 0 \quad \forall (\mathbf{u}, \mathbf{u}_s) \in \widetilde{W}_0 \quad (2.99)$$

En additionnant les équations 2.94 et 2.99, on obtient l'équation de quantité de mouvement combinée sur l'ensemble du domaine Ω . On procède de même avec l'équation de continuité.

Les équations ainsi obtenues doivent être résolues sous la contrainte que les espaces combinés des vitesses et des fonctions tests vérifient :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_s \text{ sur } P, \text{ et } \mathbf{v} = \mathbf{v}_s \text{ sur } P \quad (2.100)$$

Pour résoudre un problème sans contrainte, on introduit des multiplicateurs de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}$ et $\boldsymbol{\mu}$. On obtient donc les équations :

$$\int_{\Omega} \left(\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} - \rho \mathbf{f} \right) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v} \rangle_p, \quad \forall \mathbf{v} \in \overline{W}_0 \quad (2.101)$$

$$\int_P (\rho_s - \rho) \frac{d\mathbf{u}_s}{dt} - (\rho_s \mathbf{f}_s - \rho \mathbf{f}) \cdot \mathbf{v}_s \, d\mathbf{x} + \int_P (\boldsymbol{\sigma}_s - \boldsymbol{\sigma}) : \nabla \mathbf{v}_s \, d\mathbf{x} = - \langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v}_s \rangle_p, \quad \forall \mathbf{v}_s \in H^1(P)^2 \quad (2.102)$$

$$\langle \mathbf{u} - \mathbf{u}_s, \boldsymbol{\mu} \rangle_p = 0, \quad \forall \boldsymbol{\mu} \in \Lambda \quad (2.103)$$

et

$$\int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = 0 \quad \forall q \in L^2(\Omega) \quad (2.104)$$

avec

$$\overline{W}_u = \{u, u \in H^1(\Omega)^2, u = u_\Gamma \text{ sur } \Gamma\} \quad (2.105)$$

$$\overline{W}_0 = \{v_f, v_f \in H^1(\Omega)^2, v_f = 0 \text{ sur } \Gamma\} \quad (2.106)$$

$$\lambda \in \Lambda, \mu \in \Lambda, \Lambda = H^1(P)^2 \quad (2.107)$$

avec $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$, est le produit scalaire standard défini sur P .

Dans leur article, Glowinski et al (1999) [61] montrent que le multiplicateur de Lagrange peut être interprété comme une force volumique qui contraint le fluide à l'intérieur du solide, à bouger comme le solide.

Shi et Phan-Thien (2005) [59] ont adapté le problème présenté dans ce paragraphe à une résolution avec la méthode de lattice Boltzmann (calculs bidimensionnels). Pour cela, ils ont introduit dans l'équation de lattice Boltzmann une force qui est le multiplicateur de Lagrange :

$$f_\alpha(x + \xi_\alpha \Delta t, t + \Delta t) - f_\alpha(x, t) = -\frac{\Delta t}{\tau} [f_\alpha(x, t) - f_\alpha^{eq}(x, t)] + \Delta t F_\alpha \quad (2.108)$$

où le multiplicateur de Lagrange est inclus dans le terme source F_α , donné par :

$$F_\alpha = \frac{\omega_\alpha}{c_s^2} \lambda(x, t) \cdot \xi_\alpha \quad (2.109)$$

Shi et Phan-Thien (2005) [59] précisent qu'avec le développement asymptotique de Chapman-Enskog, on obtient les équations de Navier-Stokes avec une force volumique qui est λ . Notons ici que Guo et al en (2002) [51] ont montré que ce terme pour modéliser la force dans l'équation de lattice Boltzmann entraîne l'apparition de termes indésirables dans les équations de Navier-Stokes.

Au niveau du solide Shi et Phan-Thien (2005) [59], ont négligé les termes d'inertie et de gravité. Les équations du solide déformable ont été résolues avec la méthode des éléments finis, où ils ont utilisé des éléments finis biquadratiques. Pour transmettre le multiplicateur de Lagrange calculé sur le maillage éléments finis du solide (maillage non cartésien) vers le maillage lattice Boltzmann du domaine Ω (maillage cartésien), ils ont appliqué une approximation de la distribution de Dirac développée par Peskin [41] (voir équation 2.43) :

$$\lambda(x, t) = \sum_{l=1}^{N_e} \delta_h(x - x_{s_l}) \int_{E_l} \lambda(x_{s_l}, t) dE_l \quad (2.110)$$

où $\lambda(x, t)$ est le multiplicateur de Lagrange sur le maillage cartésien (lattice Boltzmann), $\lambda(x_{s_l}, t)$ est le multiplicateur de Lagrange sur le maillage du solide déformable, N_e est le nombre d'éléments E_l du solide déformable, x_{s_l} est la coordonnée de chaque point du solide déformable. Shi et Phan-Thien ont employé la même procédure que Glowinski et al (1999) [61] pour résoudre les équations couplées du fluide et de la structure solide (ils ont décomposé le problème couplé en trois sous-problèmes (un problème associé au fluide, un problème associé au solide et un problème associé au multiplicateur de Lagrange) qu'ils ont résolus avec une méthode de pas

fractionnés). Le code de calcul ainsi obtenu leur a permis de calculer des écoulements autour d'un cylindre fixe, et d'obtenir une bonne concordance au niveau des résultats (coefficients de traînée, de portance et de Strouhal) par rapport à ceux de la littérature (méthode des éléments finis, et notamment méthode de lattice Boltzmann). Ils ont aussi réalisé le calcul de l'interaction fluide-structure autour d'une structure mince déformable dans le sillage d'un cylindre immobile, mais aucune comparaison par rapport à d'autres résultats issus de méthodes de calcul différentes ou d'expérimentations n'a été faite.

2.6 Méthode ALE (*Arbitrary Lagrangian Eulerian*)

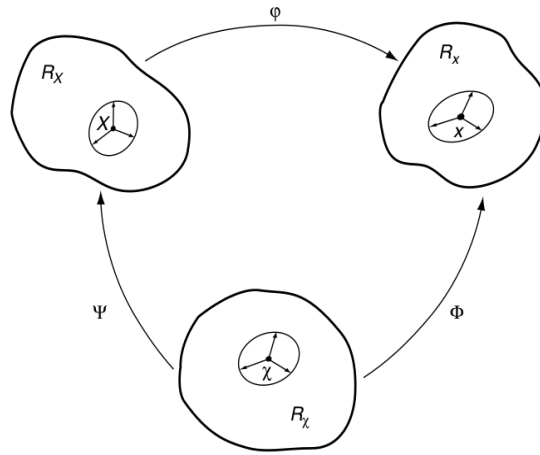


FIGURE 2.13 – Domaine initial, domaine spatial, domaine arbitraire, dans l'approche ALE [62]

Récemment, une équipe a travaillé sur la formulation ALE (*Arbitrary Lagrangian Eulerian*) appliquée au calcul d'obstacles en mouvement, avec une résolution des équations avec la méthode de lattice Boltzmann ([63]). Nous allons présenter la démarche suivie par ces auteurs dans ce paragraphe.

En mécanique des fluides, il est relativement simple de résoudre les équations du fluide avec une formulation eulérienne. Lorsqu'on s'intéresse à une structure en mouvement, il est naturel de suivre la structure en fonction du temps, avec une approche lagrangienne. Au voisinage de la structure en mouvement, le milieu fluide se déforme. Dans l'approche ALE, on combine donc l'approche eulérienne (loin de l'obstacle), et l'approche lagrangienne (dans le fluide au voisinage de l'obstacle en mouvement). Ainsi, les équations sont écrites, au voisinage de l'obstacle en mouvement, sur un domaine arbitraire dont le maillage bouge de façon arbitraire [64, 62, 65].

Dans l'approche ALE, on a donc trois configurations, comme expliqué dans l'article de Donea et al. (2004) [62] (voir figure 2.13) :

- le domaine initial R_X (coordonnées X des particules fluides à l'instant $t = 0$) ;
- le domaine spatial R_x (coordonnées x), c'est le domaine à l'instant t (déformé par le mouvement du solide) ;
- le domaine arbitraire R_χ (coordonnées χ) c'est le domaine où on résout le problème numérique.

Soit une particule fluide de coordonnées initiales X qui occupe une position x à l'instant t , dans

le domaine $R_{\mathbf{x}}$. La position \mathbf{x} peut être décrite par l'application φ :

$$\begin{aligned} \varphi : R_{\mathbf{X}} \times [0, T] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\mathbf{X}, t) &\longmapsto \mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t) \end{aligned} \quad (2.111)$$

la vitesse de la particule au temps t (vitesse lagrangienne) est :

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \varphi(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \quad (2.112)$$

Pour le domaine arbitraire R_{χ} , on peut utiliser une application ϕ pour exprimer les coordonnées du maillage mobile :

$$\begin{aligned} \phi : R_{\chi} \times [0, T] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\chi, t) &\longmapsto \mathbf{x} = \phi(\chi, t) \end{aligned} \quad (2.113)$$

Avec ceci, on peut définir la vitesse du maillage :

$$\hat{\mathbf{u}}(\chi, t) = \frac{\partial \phi(\chi, t)}{\partial t} \quad (2.114)$$

En combinant les applications φ et ϕ , Donea et al. (2004) [62] montrent que la dérivée par rapport au temps d'une quantité physique g peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(\mathbf{X}, t)}{\partial t} &= \frac{\partial g(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \frac{\partial g(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \\ &= \frac{\partial g(\chi, t)}{\partial t} + (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}) \cdot \frac{\partial g(\chi, t)}{\partial \mathbf{x}} \end{aligned} \quad (2.115)$$

En s'aidant de cette formulation, et al. (2013) [63] ont écrit l'équation de Boltzmann sous la forme :

$$\frac{df(\chi, \xi, t)}{dt} = \frac{\partial f(\chi, \xi, t)}{\partial t} + (\xi - \hat{\mathbf{u}}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f(\chi, \xi, t) = -\frac{1}{\tau} (f(\chi, \xi, t) - f(\chi, \xi, t)^{eq}) \quad (2.116)$$

qu'on peut écrire avec une notation moins lourde :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + (\xi - \hat{\mathbf{u}}) \cdot \nabla f = -\frac{1}{\tau} (f - f^{eq}) \quad (2.117)$$

La méthode développée par Meldi et al. [63] peut s'appliquer à des maillages mobiles qui ne se déforment pas (maillages en translation, rotation, qui restent cartésiens). En discrétisant l'espace des vitesses ξ en un espace contenant un nombre fini de vecteurs vitesses, et en respectant les lois de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie, Meldi et al. [63] ont obtenu l'équation de Boltzmann avec la formulation ALE dans l'espace des vitesses discrètes :

$$\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} + (\xi_{\alpha} - \hat{\mathbf{u}}) \cdot \nabla f_{\alpha} = -\frac{1}{\tau} (f_{\alpha} - f_{\alpha}^{eq}) \quad (2.118)$$

Ils ont ensuite effectué une intégration temporelle de cette équation avec un schéma précis au deuxième ordre, et ont utilisé un changement de variable :

$$h_\alpha = \left(1 + \frac{\Delta t}{2\tau}\right) f_\alpha - \frac{\Delta t}{2\tau} f_\alpha^{eq} \quad (2.119)$$

ce qui entraîne l'équation explicite suivante :

$$h_\alpha(\chi + (\xi_\alpha - \hat{u})\Delta t, t + \Delta t) = (1 - \omega)h_\alpha(\chi, t) + \omega f_\alpha^{eq}(\chi, t) \quad (2.120)$$

avec :

$$\omega = \frac{\Delta t}{\tau + \Delta t/2} \quad (2.121)$$

Cette équation peut se mettre sous la forme :

$$h_\alpha(\chi + \xi_\alpha \Delta t, t + \Delta t) = (1 - \omega)h_\alpha(\chi + \hat{u}\Delta t, t) + \omega f_\alpha^{eq}(\chi + \hat{u}\Delta t, t) \quad (2.122)$$

Meldi et al. ont résolu avec cette méthode des cas bidimensionnels (modèle $D2Q9$). Dans l'équation précédente, on remarque que les points de coordonnées $\chi + \hat{u}\Delta t$ ne correspondent pas aux nœuds du maillage LBM. De plus, si le maillage est en rotation, les vecteurs ξ_α à l'instant $t + \Delta t$ ne sont pas les mêmes que ceux à l'instant t . Avant l'étape de collision, les quantités $h_\alpha(\chi + \hat{u}\Delta t, t)$ et $f_\alpha^{eq}(\chi + \hat{u}\Delta t, t)$ correspondant au repère R_χ du maillage mobile LBM de l'instant $t + \Delta t$ sont donc reconstruites grâce à des interpolations. Meldi et al. ont démontré avec la procédure de Chapman-Enskog que le modèle de Boltzmann en formulation ALE permet bien de retrouver les équations de Navier-Stokes en formulation ALE.

La méthode proposée par ces auteurs a été appliquée à des cas tests, avec des repères mobiles, sans obstacles. Pour le cas d'un écoulement uniforme, ils ont obtenu une excellente précision des résultats. Pour un écoulement de Poiseuille, ils ont remarqué que l'erreur diminue considérablement lorsqu'une interpolation cubique est utilisée. Ils ont aussi traité le cas d'un carré en rotation dans un écoulement de Poiseuille. Ils ont noté un comportement satisfaisant de l'approche ALE-LBM, aucune discontinuité n'a été constatée au niveau de l'interface entre le domaine mobile et le domaine fixe.

Cette approche semble donc prometteuse pour le calcul d'écoulements avec des obstacles en mouvement. Cependant, elle est coûteuse à mettre en œuvre car on doit à chaque pas de temps calculer le déplacement des nœuds du maillage mobile, et réaliser des interpolations.

2.7 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, les différentes approches qui utilisent la méthode lattice Boltzmann dans l'étude des problèmes d'interaction fluide-structure, sont présentées, les avantages et inconvénients de chaque méthode sont décrits.

On a constaté que l'approche de Ladd est précise à l'ordre 2 uniquement lorsque la frontière physique est au milieu entre deux nœuds fluide et solide ($\Delta = 0.5$), ce qui limite son utilisation pour des frontières à des positions quelconques ($\Delta \neq 0.5$). De plus, elle exige un grand nombre de nœuds solides pour représenter correctement des obstacles de forme complexe, et éviter les fluctuations des forces sur l'interface de l'obstacle en mouvement. L'approche de Noble et Torczynski n'est valable que pour l'équation de lattice Boltzmann avec un opérateur de collision BGK, cela constitue donc un handicap si on veut l'étendre à d'autres modèles de collision (par exemple, MRT, temps de relaxation multiple). Le modèle de Filippova et Hänel, qui traite une frontière courbée est précis, néanmoins il souffre d'instabilité. Les résultats de simulations ont montré que le modèle de Bouzidi et al, est moins précis avec une structure en mouvement, en revanche, des bons résultats sont obtenus dans le cas d'une structure fixe. L'approche du bounce back n'est pas aisée à mettre en œuvre lorsque des solides bougent et se déforment. De plus, il faut trouver un moyen d'évaluer les fonctions de distribution des nœuds qui en un pas de temps, passent de solide, à fluide.

L'approche la plus répandue, consiste à utiliser la méthode des frontières immergées, qui est bien adaptée aux géométries complexes. La simplification de l'étape du maillage et l'absence du maillage mobile font de cette méthode une option intéressante dans l'étude des problèmes d'interaction fluide-structure en LBM. Cependant, il peut y avoir un problème de fuites numériques du fluide vers la structure solide, de plus cette méthode est applicable principalement sur les structures minces.

La méthode ALE, présente elle aussi des avantages en termes de précision et de stabilité, mais le remaillage lors des grandes déformations et déplacements de l'interface solide engendre des coûts de calculs élevé, particulièrement avec des géométries tridimensionnelles.

Dans notre cas, on souhaite modéliser des écoulements autour d'obstacles en mouvement, avec une méthode simple à mettre en œuvre. Pour cela, nous avons opté pour une combinaison de la pénalisation volumique avec la LBM, en considérant un fluide incompressible et une structure rigide. Nous allons présenter et appliquer cette méthode dans le chapitre suivant.

Chapitre 3

Pénalisation volumique appliquée à l'équation de Burgers

Sommaire

3.1	Introduction	56
3.2	Résolution de l'équation de Burgers avec le modèle lattice Boltzmann de Shi & Guo [72]	56
3.2.1	Présentation du modèle de Shi & Guo [72]	56
3.2.2	Résolution de l'équation de Burgers monodimensionnelle	58
3.2.2.1	Problème étudié	58
3.2.2.2	Résultats	59
3.3	Pénalisation volumique appliquée à l'équation de Burgers	60
3.3.1	Formulation du problème	60
3.3.2	Cas d'un domaine solide immobile	61
3.3.2.1	Algorithme du schéma utilisé	61
3.3.2.2	Résultats	62
3.3.3	Cas d'un domaine solide avec un mouvement imposé	63
3.3.3.1	Problème étudié	63
3.3.3.2	Résultats	64
3.3.4	Couplage entre la force calculée avec l'équation de Burgers pénalisée, et le mouvement du solide	64
3.3.4.1	Problème étudié	64
3.3.4.2	Modèle de couplage utilisé	66
3.3.4.3	Résultats obtenus	67
3.4	Conclusion du chapitre	68

3.1 Introduction

La méthode de pénalisation est une autre alternative pour la modélisation numérique d'écoulements autour d'obstacles. Elle consiste à utiliser une équation unique dans l'ensemble du domaine Ω composé respectivement du fluide Ω_f et du solide Ω_s . Un terme de pénalisation décrivant des contraintes souhaitées, est ajouté à l'équation physique. La résolution d'une équation unique dans les deux domaines permet de simplifier la programmation de la méthode.

Plusieurs méthodes de pénalisation ont été développées. Dans la méthode de pénalisation de Darcy, on inclut dans les équations de Navier-Stokes un terme de Darcy obligeant la vitesse du fluide à être très petite dans le domaine solide ([7], [8]). Ainsi, le domaine Ω , est vu comme un milieu poreux, de perméabilité très petite dans le solide, et très grande dans le fluide. La méthode de pénalisation volumique permet lorsqu'on l'applique par exemple aux équations de Navier-Stokes, de modéliser des écoulements autour d'obstacles en mouvement [66]. Avec cette méthode, on inclut dans l'équation à résoudre une force volumique de la forme $\lambda\chi_i(\mathbf{u} - \mathbf{u}_s)$ où λ est un paramètre de pénalisation, χ_i est une fonction masque (égale à 1 dans le domaine solide, et à 0 dans le domaine fluide), et \mathbf{u}_s est la vitesse désirée dans le solide. Cette méthode se réduit à la méthode de pénalisation de Darcy lorsque la vitesse de l'obstacle est nulle. Les équations de Navier-Stokes avec une méthode de pénalisation volumique ont été résolues par des approches numériques classiques (méthode des volumes finis [67], méthode de vorticité [68, 69, 70]). Dans ce travail, nous souhaitons utiliser la méthode de pénalisation volumique pour calculer un écoulement autour d'un obstacle en mouvement, dans le cadre d'une résolution des équations avec la méthode de lattice Boltzmann.

Dans ce chapitre, on va appliquer la méthode de pénalisation volumique à l'équation de Burgers et résoudre l'équation résultante avec la méthode de lattice Boltzmann. Nous avons choisi cette équation car elle est non linéaire, c'est une équation de convection-diffusion, et elle fait seulement intervenir le champ de vitesse, le terme de pression étant nul. Elle est donc intéressante à étudier, pour analyser le comportement de la pénalisation volumique combinée avec la LBM dans la résolution de problèmes non linéaires.

Ce chapitre débute par une présentation du modèle lattice Boltzmann pour les équations de convection-diffusion non linéaires, développé par Shi & Guo [71] (section 3.2). Dans la section (3.3), la méthode de pénalisation volumique combinée avec la LBM, est appliquée sur l'équation de Burgers monodimensionnelle. La formulation de cette combinaison est expliquée dans la section (3.3.1). Ensuite, la méthode est validée dans un premier temps, sur une structure solide, immobile dans un écoulement fluide. Le comportement d'une structure soumise à un mouvement imposé, est étudiée dans la section (3.3.3). Enfin dans la section (3.3.4), l'approche est testée sur un problème d'interaction fluide structure.

3.2 Résolution de l'équation de Burgers avec le modèle lattice Boltzmann de Shi & Guo [72]

3.2.1 Présentation du modèle de Shi & Guo [72]

Plusieurs modèles ont été proposés pour la résolution de l'équation de Burgers en utilisant le modèle Bhatnagar–Gross–Krook, dont on trouve celui de Yu et Shi [73]. Cependant, les modèles qui ont été développés nécessitent certaines hypothèses sur les termes de convection et de diffusion. De plus, la plupart des travaux développés ont été concentrés sur l'équation de Burgers unidimensionnelle, et il est difficile avec ceux-ci de résoudre les équations de Burgers de

dimensions supérieures.

Shi et Guo (2009) [72] ont proposé un modèle général de lattice Boltzmann pour l'équation de convection-diffusion avec un terme de convection non linéaire, un terme de diffusion pouvant varier dans l'espace et dans le temps, et un terme source :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{B}(\phi) = \nabla \cdot [\alpha \nabla D(\phi)] + F(\mathbf{x}, t) \quad (3.1)$$

Où ϕ est une fonction scalaire dépendant des coordonnées spatiales \mathbf{x} et du temps t , ∇ est l'opérateur gradient, B et D sont des fonctions différentielles de ϕ , α est le coefficient de diffusion, et $F(\mathbf{x}, t)$ est le terme source.

L'évolution de la fonction de distribution, est donnée par l'équation suivante :

$$f_\alpha(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}_\alpha \Delta t, t + \Delta t) - f_\alpha(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{\tau} [f_\alpha(\mathbf{x}, t) - f_\alpha^{eq}(\mathbf{x}, t)] + \Delta t F_\alpha(\vec{x}, t) \quad (3.2)$$

où $f_\alpha(\mathbf{x}, t)$ représente la fonction de distribution de particules de vitesse $\boldsymbol{\xi}_\alpha$, à la position \mathbf{x} et à l'instant t , $f_\alpha^{eq}(\mathbf{x}, t)$ est la fonction de distribution à l'équilibre, $F_\alpha(\mathbf{x}, t)$ le terme force, et τ le temps de relaxation adimensionnel.

Pour résoudre l'équation (3.1), en utilisant l'équation (3.2), et afin d'obtenir correctement les paramètres macroscopiques, la fonction de distribution à l'équilibre $f_\alpha^{eq}(\mathbf{x}, t)$ ainsi que le terme force $F_\alpha(\mathbf{x}, t)$ doivent être appropriés, ils doivent satisfaire les moments de $f_\alpha^{eq}(\mathbf{x}, t)$ et de $F_\alpha(\mathbf{x}, t)$ [72]. Dans le modèle de Shi & Guo, la fonction de distribution à l'équilibre $f_\alpha^{eq}(\mathbf{x}, t)$ est donnée par :

$$f_\alpha^{eq}(\mathbf{x}, t) = \omega_\alpha \left[\phi + \frac{\boldsymbol{\xi}_\alpha \cdot \mathbf{B}}{c_s^2} + \frac{(\mathbf{C} - c_s^2 \phi \mathbf{I}) : (\boldsymbol{\xi}_\alpha \boldsymbol{\xi}_\alpha - c_s^2 \mathbf{I})}{2c_s^4} \right] \quad (3.3)$$

où ω_α est le poids associé à chaque direction α , et c_s la vitesse du son dans le réseau, \mathbf{I} la matrice identité, $\mathbf{C}(\phi)$ le moment de second ordre de f_α^{eq} donné par :

$$\mathbf{C}(\phi) = \mathbf{C}_0(\phi) + c_s^2 D(\phi) \mathbf{I} \quad (3.4)$$

avec :

$$\mathbf{C}_0(\phi) = \int \mathbf{B}'(\phi) \mathbf{B}'(\phi) d(\phi) \quad (3.5)$$

$$\mathbf{C}'_0(\phi) = \mathbf{B}'(\phi) \mathbf{B}'(\phi) \quad (3.6)$$

et $\mathbf{B}'(\phi) = \frac{d\mathbf{B}}{d\phi}$. Le terme source est donné de la manière suivante :

$$F_\alpha(\mathbf{x}, t) = \omega_\alpha F \left(1 + \lambda \frac{\boldsymbol{\xi}_\alpha \cdot \mathbf{B}'(\phi)}{c_s^2} \right) \quad (3.7)$$

où $\lambda = \frac{\tau - 1/2}{\tau}$. Le terme de diffusion α est déterminé en fonction du temps de relaxation τ :

$$\alpha = c_s^2 \left(\tau - \frac{1}{2} \right) \Delta t \quad (3.8)$$

La variable ϕ est obtenue avec :

$$\phi = \sum_{\alpha} f_{\alpha} = \sum_{\alpha} f_{\alpha}^{eq} \quad (3.9)$$

3.2.2 Résolution de l'équation de Burgers monodimensionnelle

Dans un premier temps, nous avons résolu une équation de Burgers monodimensionnelle avec le modèle de Shi & Guo, sans la pénalisation volumique, et nous avons comparé les résultats avec une solution analytique.

3.2.2.1 Problème étudié

On considère un champ de vitesse $u(x, t)$, $x \in \Omega = [0, 1]$. Le mouvement du fluide est décrit par l'équation de Burgers monodimensionnelle sans terme source, avec les conditions initiales et aux limites suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad \text{sur } \Omega \\ u(0, t) = 0 \\ u(1, t) = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) = \sin(\pi x) \end{array} \right. \quad (3.10)$$

Les conditions aux limites et initiales sont choisies de manière à satisfaire la solution analytique suivante :

$$u(x, t) = 2\pi\nu \frac{\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2\pi^2\nu t} n \sin(n\pi x)}{b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2\pi^2\nu t} \cos(n\pi x)} \quad (3.11)$$

Où b_0 et b_n sont les coefficients de Fourier définis par :

$$b_0 = \int_0^1 e^{-(2\pi\nu)^{-1}[1-\cos(\pi x)]} dx \quad (3.12)$$

$$b_n = 2 \int_0^1 e^{-(2\pi\nu)^{-1}[1-\cos(\pi x)]} \cos(n\pi x) dx \quad (3.13)$$

L'équation de Burgers a été résolue avec le modèle de lattice Boltzmann présenté dans le paragraphe précédent, avec un modèle $D1Q3$. Ses caractéristiques sont données comme suit : $\{\xi_0, \xi_1, \xi_2\} = \{0, c, -c\}$, $\omega_0 = 2/3$, $\omega_1 = \omega_2 = 1/6$, $c_s^2 = c^2/3$. avec $c = \Delta x / \Delta t$.

Pour appliquer les conditions aux limites sur les fonctions de distribution, nous avons procédé comme suit. Avec le modèle $D1Q3$, la vitesse $u(x, t)$ s'écrit :

$$u(x, t) = f_0(x, t) + f_1(x, t) + f_2(x, t) \quad (3.14)$$

Après l'étape de propagation, la fonction $f_2(0, t)$ est connue à $x = 0$ (voir figure 3.1), en revanche $f_1(0, t)$ est inconnue, elle est donc calculée par la condition aux limites de la façon suivante :

$$f_1(0, t) = u(0, t) - f_0(0, t) - f_2(0, t) \quad (3.15)$$

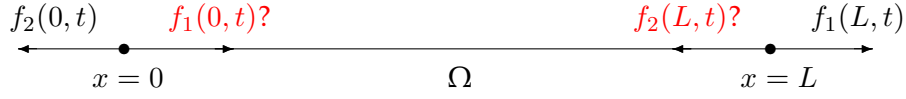


FIGURE 3.1 – Conditions aux limites pour le modèle $D1Q3$, équation de Burgers.

De la même manière à $x = L$, après l'étape de propagation $f_2(L, t)$ est inconnue, elle est obtenue par :

$$f_2(L, t) = u(L, t) - f_0(L, t) - f_1(L, t) \quad (3.16)$$

D'un point de vue dimensionnel, une durée de simulation de $1s$ a été simulée, avec un pas de temps égal à $8.33 \times 10^{-5}s$, une longueur de $1m$, et un pas d'espace de $0.01m$, et une viscosité cinématique égale à $0.1 m^2.s^{-1}$. Cela correspond, concernant l'équation de lattice Boltzmann résolue, à un intervalle de temps $\tilde{T} = 12000\Delta t$, avec un pas de temps $\tilde{\Delta t} = 1$, une longueur $\tilde{L} = 100$, avec un pas d'espace $\tilde{\Delta x} = 1$, et une viscosité cinématique $\tilde{\nu} = 0.083$.

3.2.2.2 Résultats

La figure 3.2, représente l'évolution de la vitesse u en fonction du temps t . On remarque clairement que les résultats obtenus avec la LBM sont en parfaite concordance avec ceux de la solution analytique.

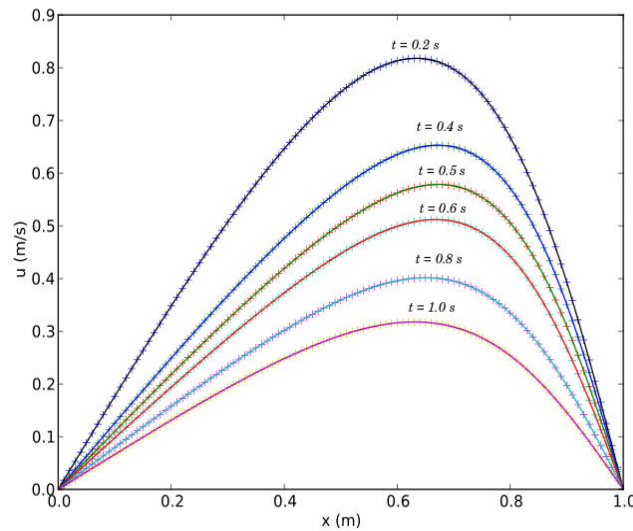


FIGURE 3.2 – Comparaison du champ de vitesse obtenus à différents instants t par : - Solution analytique + LBM modèle de Shi & Guo

Nous avons calculé l'erreur relative sur la vitesse. Cette erreur en pourcentage en norme L^2

est déterminée de la manière suivante :

$$Er(\%) = \frac{\sqrt{\sum_{i=0}^N (u(i) - u_a(i))^2}}{\sqrt{\sum_{i=0}^N u_a(i)^2}} \times 100 \quad (3.17)$$

où u_a est la solution analytique (solution exacte), u la solution calculée numériquement en utilisant la LBM.

Le tableau 3.1 rapporte l'erreur relative E_r sur la vitesse à différents instants de simulation, où E_r est de l'ordre de 0.020 %, ce qui est une erreur très faible. Ces résultats obtenus, reflètent la fiabilité du modèle de Shi & Guo dans l'étude de l'équation de Burgers.

Temps (s)	Erreur relative Er (%)
0.20	0,0174
0.40	0,0213
0.50	0,0221
0.60	0,0223
0.80	0,0218
1.00	0,0216

TABLE 3.1 – Erreur relative en vitesse à différents instants t

3.3 Pénalisation volumique appliquée à l'équation de Burgers

On va appliquer dans cette section, la méthode de la pénalisation volumique à l'équation de Burgers, et résoudre l'équation résultante avec la méthode de lattice Boltzmann. On discutera les aspects de mise en œuvre, et on testera l'approche sur plusieurs cas d'études, afin de juger la capacité de la pénalisation à résoudre ce type de problème.

3.3.1 Formulation du problème

Considérons un domaine Ω , composé d'un domaine fluide $\Omega_f(t)$ et d'un domaine solide $\Omega_s(t)$, où l'interface entre le fluide et le solide peut bouger en fonction du temps (voir la figure 3.3)



FIGURE 3.3 – Description du domaine d'étude

Pour traiter le mouvement du solide, on résout l'équation de Burgers, dans laquelle on

introduit maintenant un terme de pénalisation volumique :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{1}{\eta} (\chi_i(u - u_s)) \quad \text{sur } \Omega \quad (3.18)$$

Dans le terme de pénalisation, χ_i est la fonction masque, qui vaut 0 dans le domaine fluide $\Omega_f(t)$, et qui vaut 1 dans le domaine solide $\Omega_s(t)$, η est le coefficient de perméabilité qui est très petit dans le domaine solide, et u_s est la vitesse de l'interface fluide-solide. Dans le domaine fluide, le terme χ_i/η est nul, le terme de pénalisation est donc nul. Dans le domaine solide, le terme χ_i/η est très grand, ainsi la vitesse dans le domaine solide devient égale à la vitesse u_s .

Pour résoudre cette équation avec la méthode de lattice Boltzmann, le terme de pénalisation sera pris en compte par l'intermédiaire du terme force $F_\alpha(\mathbf{x}, t)$ (voir équation 3.7). Dans cette équation, la force F vaut :

$$F = -\frac{1}{\eta} (\chi_i(u - u_s)) \quad (3.19)$$

Si le terme force $F_\alpha(\mathbf{x}, t)$ (qui est très grand dans le solide) est traité de façon explicite dans l'équation de lattice Boltzmann, il se produit des instabilités et il n'est pas possible de résoudre cette équation.

Pour nous affranchir de ce problème, nous avons dû traiter le terme force de façon implicite, comme décrit dans l'annexe A (4.4). Avec l'analyse de Chapman-Enskog, nous avons alors obtenu pour le coefficient λ de l'équation 3.7 la valeur $\lambda = \frac{\tau - 1/2}{\tau - 1}$. De plus, en traitant le terme force de façon implicite, nous avons obtenu pour le modèle D1Q3 un système de trois équations à 3 inconnues $f_0(\mathbf{x}, t)$, $f_1(\mathbf{x}, t)$, $f_2(\mathbf{x}, t)$ à résoudre à chaque pas de temps, afin d'obtenir ensuite la vitesse en chaque point du maillage, à chaque pas de temps (voir équation 3.9). Ceci est détaillé dans l'annexe B (4.4).

3.3.2 Cas d'un domaine solide immobile

Pour ce cas-ci, nous avons $\Omega = [0; 1.2]$, avec $\Omega_f(t) = [0; 1.]$, et $\Omega_s(t) = [1; 1.2]$. Comme le domaine solide ne bouge pas, on a : $u_s = 0$. La condition aux limites sur le bord gauche du domaine fluide est : $u(0, t) = 0$. La condition initiale est : $u(x, 0) = \sin(\pi x)$.

D'un point de vue dimensionnel, nous avons fait des calculs sur une durée de simulation de 1s, avec un pas de temps égal à $3.70 \times 10^{-5}s$, et avec un pas d'espace égal à $0.007m$, et une viscosité cinématique de $0.1 \text{ m}^2.s^{-1}$. Cela correspond, concernant les calculs avec la méthode de lattice Boltzmann, à un intervalle de temps $\tilde{T} = 27000$, avec un pas de temps $\tilde{\Delta t} = 1$, une longueur $\tilde{L} = 180$, avec un pas d'espace $\tilde{\Delta x} = 1$, et une viscosité cinématique $\tilde{\nu} = 0.083$. Le paramètre de pénalisation est $\eta = 10^{-9}$.

3.3.2.1 Algorithme du schéma utilisé

L'algorithme 1 explique la démarche des simulations numériques suivies dans nos calculs, dans le cas d'un écoulement fluide autour d'une structure immobile.

Algorithm 1 : Algorithme du schéma utilisé, domaine solide fixe

1. Définition des domaines fluide Ω_f et solide Ω_s
2. Définition de la fonction caractéristique χ_i pour chaque nœud
3. Initialisation à $t = 0$ de $u(x, 0)$, $f_\alpha(x, 0)$ et $f_\alpha^{eq}(x, 0)$

Pour chaque pas de temps Δt :

4. Calcul de la vitesse macroscopique $u(x, t)$
5. Calcul de $f_\alpha^{eq}(x, t)$
6. Calcul de l'opérateur de collision Ω_α
7. Résolution du système linéaire (3×3), d'inconnues f_0, f_1, f_2
8. Application des conditions aux limites
9. Mise à jour de $f_\alpha(x, t)$

Retour à l'étape 4 si $t < t_{max}$

3.3.2.2 Résultats

La figure 3.4 représente la variation de la vitesse $u(x, t)$ au cours du temps. On constate que les résultats de la pénalisation volumique sont en bon accord avec ceux de la solution analytique présentée dans la section (3.2.2.1).

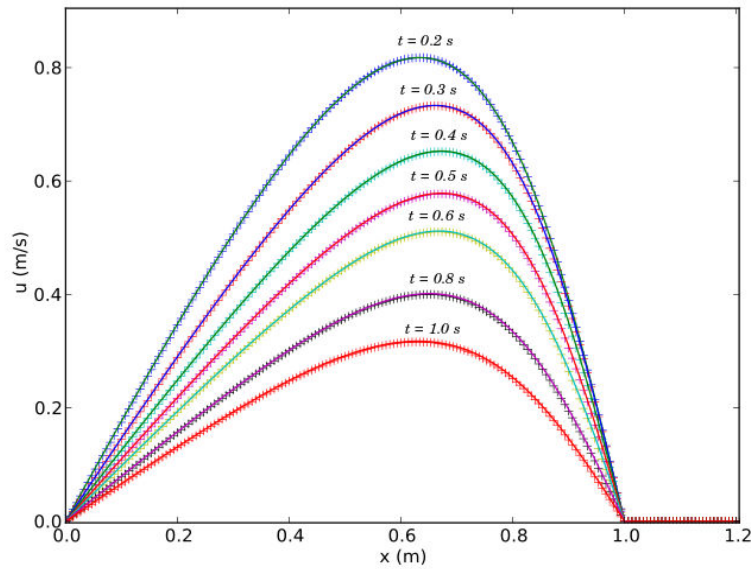


FIGURE 3.4 – Comparaison du champ de vitesse u obtenu à différents instants t par : – Solution analytique + Pénalisation volumique combinée avec la LBM

Les résultats de l'erreur relative sur la vitesse u , sont répertoriés dans le tableau 3.2. On note que ces résultats sont plutôt satisfaisants. L'erreur entre la solution calculée numériquement avec la pénalisation volumique et la solution exacte, ne dépasse pas 0.80 %.

Temps (s)	Erreur relative Er (%)
0.20	0,6024
0.30	0,6010
0.40	0,6225
0.50	0,6509
0.60	0,6802
0.80	0,7376
1.00	0,7946

TABLE 3.2 – Erreur relative E_r en vitesse à différents instants t , domaine solide fixe

On peut conclure que, la pénalisation volumique combinée avec la LBM peut s'appliquer sur un problème de Burgers, dans le cas où la vitesse du solide u_s est nulle.

3.3.3 Cas d'un domaine solide avec un mouvement imposé

3.3.3.1 Problème étudié

Le domaine Ω est le même que précédemment : $\Omega = [0, 1.2]$, mais dans ce paragraphe, l'interface fluide-solide x_s bouge au cours du temps, selon un mouvement imposé, qui se traduit par l'équation suivante :

$$x_s(t) = A t + B \quad (3.20)$$

Cela mène à une vitesse constante de l'interface au cours du temps :

$$u_s(t) = A \quad (3.21)$$

La condition initiale sur Ω_f est la même que précédemment : $u(x, 0) = u_0(x) = \sin(\pi x)$. La condition aux limites sur le bord gauche du domaine est : $u(0, t) = 0$.

Nous avons calculé la vitesse du fluide avec l'équation de Burgers pénalisée (voir équation 3.18), résolue avec la méthode de lattice Boltzmann. Les calculs ont été faits, d'un point de vue dimensionnel, sur une durée de simulation de 1s, avec un pas de temps de $1.85 \times 10^{-5}s$, un pas d'espace égal à $0.003333m$, une viscosité cinématique de $0.05 \text{ m}^2.s^{-1}$. Au niveau du calcul avec la méthode de lattice Boltzmann, cela correspond à un intervalle de temps $\tilde{T} = 54000$, avec un pas de temps $\tilde{\Delta}t = 1$, une longueur $\tilde{L} = 300$, un pas d'espace $\tilde{\Delta}x = 1$, et une viscosité cinématique $\tilde{\nu} = 0.083$. Le paramètre de pénalisation $\eta = 10^{-9}$.

Afin de comparer les résultats de la pénalisation volumique combinée avec la LBM, l'équation de Burgers, a aussi été résolue avec la méthode des différences finies (FDM) et la pénalisation volumique, en utilisant un schéma de Crank-Nicholson pour l'intégration temporelle, et avec un traitement implicite du terme de pénalisation. Les mêmes paramètres de calcul ont été utilisés pour la résolution avec la méthode des différences finies (pas de temps $1.85 \times 10^{-5}s$, pas d'espace $0.003333m$).

Nous pouvons remarquer ici que l'interface $x_s(t)$ ne coïncide pas forcément avec les nœuds du domaine de calcul. Nous avons donc dû augmenter le nombre de nœuds, par rapport au cas

où le domaine solide était immobile (301 noeuds, alors qu'on avait 181 noeuds lorsque le domaine solide était immobile).

L'algorithme 2 explique les différentes étapes de calcul, dans le cas où on impose un mouvement à l'interface fluide-solide x_s . Cet algorithme est presque le même que celui d'avant avec quelques modifications.

Algorithm 2 : Algorithme du schéma utilisé, domaine solide mobile

1. Initialisation des domaines fluide Ω_f et solide Ω_s ainsi que l'interface de x_s
2. Initialisation à $t = 0$ de $u(x, 0)$, $f_\alpha(x, 0)$ et $f_\alpha^{eq}(x, 0)$
3. Initialisation à $t = 0$ de A, B et la vitesse de l'interface u_s

Pour chaque pas de temps Δt :

4. Calcul de la position x_s et de la vitesse u_s
5. Définition de la fonction caractéristique χ_i pour chaque nœud
6. Calcul de la vitesse macroscopique $u(x, t)$
7. Calcul de $f_\alpha^{eq}(x, t)$.
8. Calcul de l'opérateur de collision Ω_α
9. Résolution du système linéaire (3 x 3), d'inconnues f_0, f_1, f_2
10. Application des conditions aux limites
11. Mise à jour de $f_\alpha(x, t)$

Retour à l'étape 4 si $t < t_{max}$

3.3.3.2 Résultats

Les résultats des simulations pour différents instants t , sont présentés dans la figure 3.5. On remarque que les résultats de la pénalisation volumique obtenus avec LBM et la méthode des différences finies, sont en bon accord. On constate également que l'interface fluide-solide x_s est en mouvement au cours du temps avec une vitesse u_s constante.

Pour conclure, on peut dire que la méthode de pénalisation volumique combinée avec la LBM, peut être utilisée pour imposer des mouvements sur des structures rigides.

3.3.4 Couplage entre la force calculée avec l'équation de Burgers pénalisée, et le mouvement du solide

3.3.4.1 Problème étudié

Dans cette partie, on va appliquer la méthode de pénalisation volumique combinée avec la LBM à un problème d'interaction fluide structure. Cela est considéré comme un autre test de validation de notre approche.

On parle de l'interaction fluide-structure lorsque l'écoulement fluide est modifié par la structure et vice versa, c'est à dire que la position de la structure est modifiée par l'écoulement fluide. La structure peut être rigide ou souple.

On considère l'équation de Burgers couplée avec une structure rigide accrochée à un ressort, (voir la figure 3.6). Le déplacement de la structure est régi par le principe fondamental de la

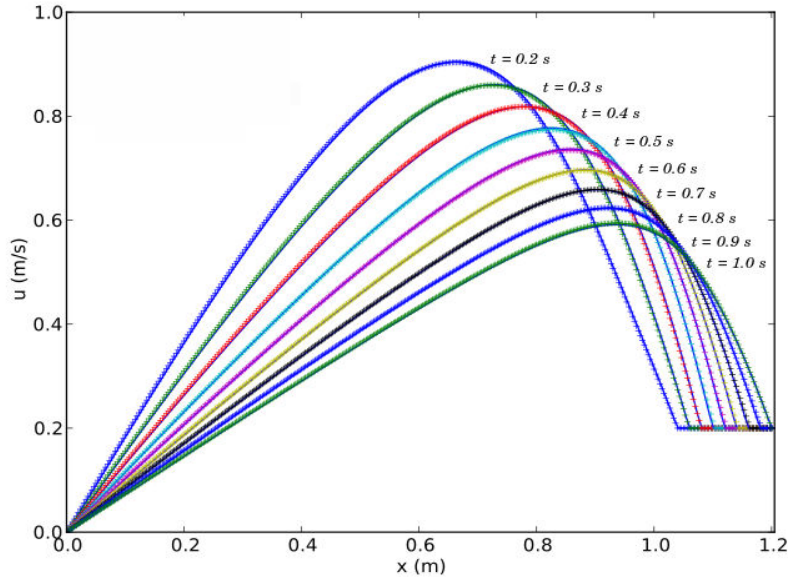


FIGURE 3.5 – Comparaison du champ de vitesse obtenu à différents instants t par : – Pénalisation volumique combinée avec les différences finies + Pénalisation volumique combinée avec la LBM

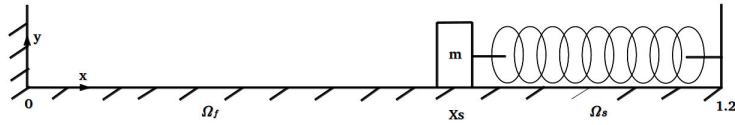


FIGURE 3.6 – Description du domaine d'étude d'interaction fluide-structure

dynamique :

$$m \ddot{x}_s(t) + k(x_s(t) - X_0) = F_{fluide}(x_s(t)) \quad (3.22)$$

où $x_s(t)$ est la position de l'interface fluide-structure, m la masse de la structure, k et X_0 , représentent respectivement la raideur et la longueur à vide du ressort. On note que le système est non amorti. La structure est soumise à deux forces : la force de rappel, qui est proportionnelle à l'allongement du ressort, et la force exercée par le fluide qui est donnée par :

$$F_{fluide}(x_s(t)) = -\nu \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x_s(t)} \quad (3.23)$$

où u est la vitesse du fluide à l'interface de coordonnée x_s . La vitesse du fluide est calculée avec l'équation de Burgers pénalisée, résolue avec la méthode de lattice Boltzmann, sur le domaine spatial $\Omega = [0; 1.2]$. La condition initiale est : $u(x, 0) = \sin(\pi x)$, $x \in \Omega_f[0] = [0; 1]$, et $u(x, 0) = 0$, $x \in \Omega_s(0) = [1; 1.2]$. La condition aux limites sur le bord gauche du domaine fluide est : $u(0, t) = 0$.

3.3.4.2 Modèle de couplage utilisé

La plupart des méthodes développées pour la modélisation numérique des problèmes d'interaction fluide-structure utilisent les algorithmes d'intégration décalée [74]. L'approche consiste à résoudre successivement des problèmes fluide et solide. Cette dernière est résumée dans le schéma suivant :

$$M_{n-1} \xrightarrow{1} F_n \xrightarrow{2} f_n \xrightarrow{3} S_n \xrightarrow{4} I_n \xrightarrow{5} M_n$$

où M représente la configuration du maillage du domaine fluide $\Omega_f(t)$, F est l'état du fluide (champs de vitesse par exemple), f sont les efforts exercés par le fluide sur la structure, S est l'état de la structure, I est la position de l'interface fluide-structure. Les indices sont relatifs au numéro de pas de temps courant. On remarque bien que dans ce schéma, on intègre d'abord le fluide, puis la structure.

Il existe une autre manière, qui consiste à prendre en compte la structure, puis le fluide [75]. L'algorithme devient :

$$f_{n-1} \xrightarrow{1} S_n \xrightarrow{2} I_n \xrightarrow{3} M_n \xrightarrow{4} F_n \xrightarrow{5} f_n$$

Dans les algorithmes d'intégration décalée, on trouve des algorithmes explicites (schémas synchrone et asynchrone) et implicites, chacun avec ses avantages et inconvénients. Dans notre cas, on a choisi le schéma explicite synchrone, développé par Farhat et al [76]. Ce schéma est facile à mettre en œuvre, et les deux sous systèmes (fluide et structure) sont résolus l'un après l'autre sur un seul pas de temps. La figure 3.7, montre l'algorithme du schéma explicite synchrone utilisé dans nos simulations avec la méthode de lattice Boltzmann. Notons ici que le maillage du domaine de calcul, dans nos simulations, reste fixe au cours du temps.

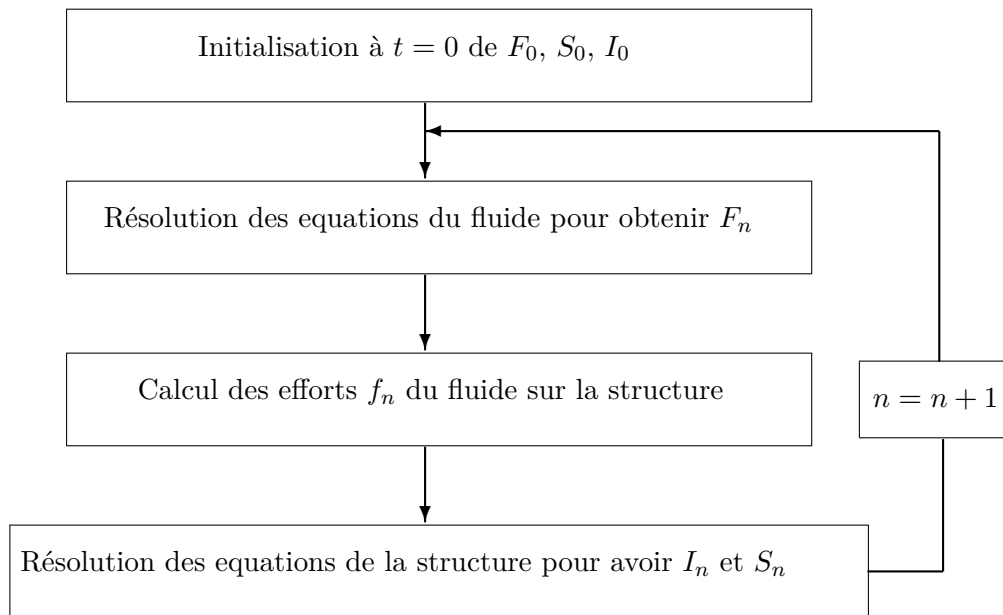


FIGURE 3.7 – Algorithme du modèle de couplage d'interaction fluide-structure utilisé

3.3.4.3 Résultats obtenus

Nous avons calculé la vitesse du fluide avec l'équation de Burgers pénalisée (voir équation 3.18), résolue avec la méthode de lattice Boltzmann. L'équation (3.22) du système masse-ressort a été résolue avec la méthode itérative de Runge-Kutta à l'ordre 4.

D'un point de vue dimensionnel, une durée de simulation $T = 1s$ a été considérée, avec un pas de temps $\Delta t = 1.85 \times 10^{-5}s$, un pas d'espace $\Delta x = 0.003333m$, une viscosité cinématique $\nu = 0.05 \text{ m}^2.s^{-1}$. Ceci correspond, au niveau du calcul avec la méthode de lattice Boltzmann, à un intervalle de temps $\tilde{T} = 54000$, avec un pas de temps $\tilde{\Delta t} = 1$, une longueur $\tilde{L} = 300$, avec un pas d'espace $\tilde{\Delta x} = 1$ (le domaine de maillage spatial comprend 301 noeuds), et une viscosité cinématique $\tilde{\nu} = 0.083$. Le paramètre de pénalisation vaut $\eta = 10^{-9}$.

Les paramètres relatifs au système masse-ressort sont donnés par : $X_0 = 0.95m$, $m = 0.5kg$, et nous avons considéré deux valeurs pour la constante du ressort : $k = 39.5N/m$ et $k = 0.395N/m$.

La figure 3.8, illustre la position de l'interface fluide-structure au cours du temps, pour un ressort de coefficient de raideur $k = 39.5N/m$. On observe que le mouvement de l'interface est influencé principalement par le mouvement du système masse ressort, l'amplitude du mouvement de l'interface diminue en fonction du temps car le fluide induit un effet d'amortissement sur le déplacement de la structure. Pour un ressort de coefficient de raideur $k = 0.395N/m$, la force exercée par le système masse ressort sur l'interface est faible, et le mouvement de l'interface est dû principalement aux efforts exercés par le fluide. On constate aussi que les résultats de la pénalisation volumique obtenus avec la LBM et la méthode des différences finies, sont très proches. Sur la figure 3.9, nous avons représenté le profil de la vitesse de l'interface à l'instant final (à $t = 1s$). On y remarque un bon accord entre les résultats obtenus avec la méthode de lattice Boltzmann, et ceux calculés avec la méthode des différences finies.

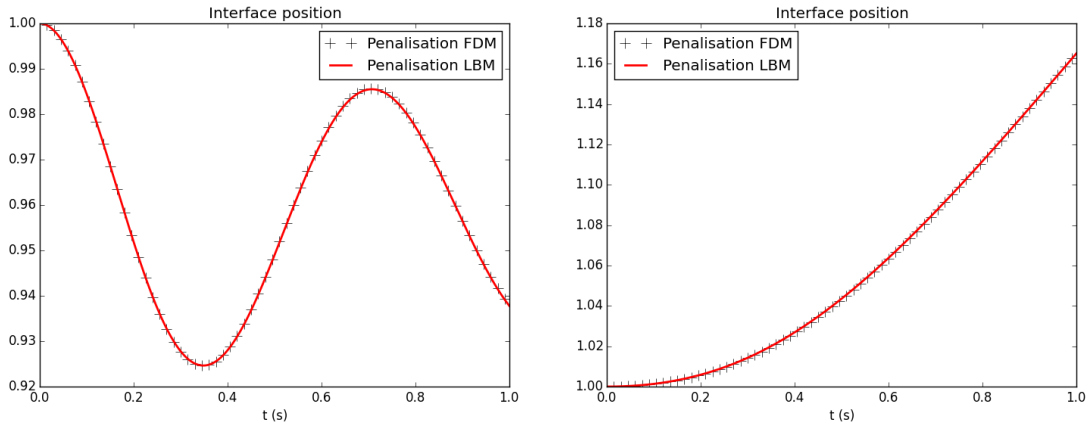


FIGURE 3.8 – Position de l'interface, en fonction du temps : - Pénalisation volumique combinée avec la LBM, + Pénalisation volumique combinée avec la méthode des différences finies. a) $k=39.5 \text{ N/m}$, b) $k=0.395 \text{ N/m}$.

Nos simulations sur l'équation de Burgers 1D de la pénalisation volumique combinée à la LBM et de la pénalisation volumique combinée à la méthode des différences finies sont comparables (temps de semblables).

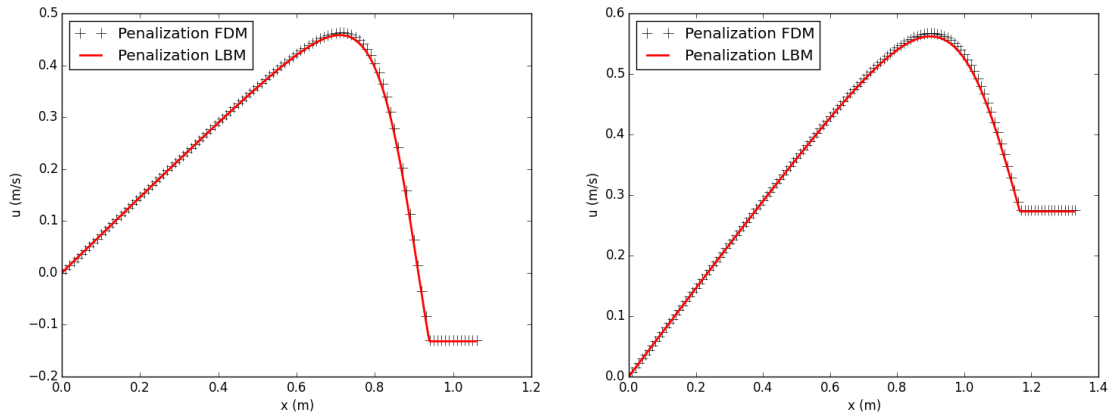


FIGURE 3.9 – Vitesse de l'interface à $t = 1s$: - Pénalisation volumique combinée avec la LBM, + Pénalisation volumique combinée avec la méthode des différences finies. a) $k=39.5$ N/m, b) $k=0.395$ N/m .

Les résultats de cette section, montrent que la pénalisation volumique combinée avec la LBM, peut être aussi une alternative dans l'étude des problèmes d'interaction fluide-structure.

3.4 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, la méthode de pénalisation volumique combinée avec la LBM, a été présentée et validée sur l'équation de Burgers monodimensionnelle, qui est un exemple simple d'équation non-linéaire. On a vu que le terme de pénalisation est ajouté comme terme source dans l'équation de lattice Boltzmann. Ce terme a été traité d'une manière implicite.

L'application de la technique a été portée tout d'abord sur un écoulement fluide autour d'une structure fixe, ensuite sur une structure mobile avec un mouvement imposé. Enfin l'approche est appliquée à un problème d'interaction fluide structure de type masse-ressort.

L'analyse de différents résultats obtenus montre la capacité de cette technique à caractériser le comportement d'une structure dans un écoulement fluide. Par ailleurs, ces résultats sont en bon accord avec ceux issus de la solution analytique ou de la méthode des différences finies.

Cependant, l'approche utilisée ne considère qu'une équation non linéaire assez simple. Cette conclusion reste donc à confirmer avec des applications sur d'autres équations plus complexes et plus proches de la réalité. L'extension de la méthode sur les équations de Navier-Stokes 2D sera l'objectif du chapitre suivant.

Chapitre 4

Écoulement autour d'un solide avec la pénalisation volumique et la LBM

Sommaire

4.1	Introduction	70
4.2	Pénalisation volumique appliquée aux équations de Navier-Stokes	70
4.3	Applications et validation	72
4.3.1	Caractérisation des grandeurs physiques étudiées	72
4.3.2	Condition d'incompressibilité	73
4.3.3	Convergence des calculs	73
4.3.4	Écoulement autour d'un obstacle carré immobile	73
4.3.4.1	Présentation du domaine d'étude	73
4.3.4.2	Discussion et validation des résultats	74
4.3.5	Écoulement autour d'un obstacle circulaire immobile	85
4.3.5.1	Présentation du domaine d'étude	85
4.3.5.2	Discussion et validation des résultats	85
4.3.6	Écoulement autour d'un obstacle circulaire mobile	91
4.3.6.1	Adimensionalisation de la structure	91
4.3.6.2	Cylindre en oscillation forcée	92
4.3.7	Cylindre en oscillation libre	93
4.3.8	Écoulement entre deux plaques mobiles dans un canal	94
4.3.8.1	Rappel sur le modèle MRT	95
4.3.8.2	Discussion et validation des résultats	96
4.4	Conclusion du chapitre	99

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons utiliser la méthode de lattice Boltzmann pour résoudre les équations de Navier-Stokes autour d'obstacles mobiles, avec la méthode de la pénalisation volumique. Les équations de Navier-Stokes sont des équations aux dérivées partielles non linéaires qui décrivent le mouvement des fluides. La résolution des équations de Navier-Stokes est difficile dans la mesure où la solution exacte est complexe voir impossible, une solution approchée est généralement envisagée. La principale difficulté réside dans le couplage entre les variables de vitesse $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ (fonction vectorielle) et de pression $p(\mathbf{x}, t)$ (fonction scalaire), s'ajoute à cela, la non linéarité du terme convectif $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$.

Par ailleurs, il est possible de dériver les équations de Navier-Stokes incompressibles à partir de l'équation de Boltzmann, en utilisant le développement de Chapman-Enskog pour la fonction de distribution $f(\mathbf{x}, t)$ à faible nombre de Mach.

Vu l'importance que présentent les écoulements autour d'obstacles (par exemple : écoulement de l'eau autour des constructions portuaires, écoulement de l'eau de la rivière autour des piliers de ponts, effet du vent sur les bâtiments), il sera très intéressant d'affronter notre approche de la pénalisation volumique combinée avec la LBM, aux équations de Navier-Stokes. Comme c'est le cas dans le paragraphe précédent avec l'équation de Burgers, on continue à tester la capacité ainsi que la fiabilité de notre approche. Ça sera donc l'objectif de ce chapitre.

Dans ce chapitre, nous présentons comment nous appliquons la méthode de la pénalisation volumique dans les équations de Navier-Stokes, résolues avec la méthode de lattice Boltzmann. Les résultats obtenus avec cette méthode sont ensuite validés sur un écoulement autour d'obstacles immobiles, puis autour d'un obstacle mobile, en oscillations forcées, puis libres.

4.2 Pénalisation volumique appliquée aux équations de Navier-Stokes

Dans cette section, pour calculer un écoulement autour d'un obstacle, nous résolvons les équations de Navier-Stokes contenant un terme de pénalisation volumique, avec la méthode de lattice Boltzmann. Les équations de conservation de quantité de mouvement, dans lesquelles on introduit un terme de pénalisation volumique, sont exprimées par [8] :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} - \frac{\rho}{\eta} (\chi_i (\mathbf{u} - \mathbf{u}_s)) \quad (4.1)$$

où ρ et μ sont la densité et viscosité dynamique du fluide, \mathbf{u} est la vitesse du fluide, et p est la pression. Comme dans le chapitre précédent, dans le terme de pénalisation, η est le paramètre de pénalisation, χ_i est une fonction masque, \mathbf{u}_s est la vitesse dans le solide. Dans ce chapitre, les équations de Navier-Stokes ont été résolues pour un obstacle immobile ($\mathbf{u}_s = \mathbf{0}$) et un obstacle mobile ($\mathbf{u}_s \neq \mathbf{0}$). L'équation de continuité est :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (4.2)$$

Dans les équations de conservation des quantités de mouvement, le terme de pénalisation est un terme source volumique. Il sera donc modélisé comme une force volumique dans l'équation de lattice Boltzmann. Tenant compte du fait que la LBM est définie à l'échelle mésoscopique, il est important que le modèle de la force soit aussi construit à cette échelle, il doit être approprié afin d'obtenir correctement les paramètres hydrodynamiques comme la densité et la vitesse.

En se basant sur le développement de Chapman-Enskog plusieurs approches traitant le terme force ont été proposées, dont on cite, les travaux de Luo en (1993) [77], Shan et Chen en (1994) [78], Buick et Greated en (2000) [79], Ladd et Verberg en (2001) [31]. Guo et al en (2002) [51] ont présenté un modèle de force qui permet d'obtenir exactement l'équation de continuité et de la quantité de mouvement donc les équations de Navier-Stokes. Il prend en considération l'influence de la variation temporelle et spatiale de la force, ainsi que l'effet de la discrétisation sur le terme force. C'est ce modèle que nous utilisons pour prendre en compte le terme de pénalisation.

On résout donc l'équation de lattice Boltzmann avec un terme de collision BGK, et avec un terme source :

$$f_\alpha(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}_\alpha \Delta t, t + \Delta t) = f_\alpha(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{\tau} (f_\alpha(\mathbf{x}, t) - f_\alpha^{eq}(\mathbf{x}, t)) + \Delta t F_\alpha \quad (4.3)$$

où $f_\alpha(\mathbf{x}, t)$ est la probabilité de trouver une particule fluide de vitesse $\boldsymbol{\xi}_\alpha$ à une position \mathbf{x} et à un instant t , Δt est le pas de temps, τ est le temps de relaxation adimensionnel, f_α^{eq} est la fonction de distribution à l'équilibre, et F_α est le terme de forçage qui va prendre en compte le terme de pénalisation. Nous avons modélisé des écoulements bidimensionnels, et nous avons utilisé pour cela le modèle $D2Q9$. La fonction de distribution des particules à l'équilibre $f_\alpha^{eq}(\mathbf{x}, t)$ est donnée par :

$$f_\alpha^{eq} = \omega_\alpha \rho \left[1 + \frac{(\boldsymbol{\xi}_\alpha \cdot \mathbf{u})}{c_s^2} + \frac{(\boldsymbol{\xi}_\alpha \cdot \mathbf{u})^2}{2c_s^4} - \frac{\mathbf{u}^2}{2c_s^2} \right] \quad (4.4)$$

où ω_α sont les coefficients de pondération, c_s est la vitesse du son dans le réseau.

Dans l'équation de lattice Boltzmann, le terme de pénalisation $\mathbf{F} = -\frac{\rho}{\eta} (\chi_i(\mathbf{u} - \mathbf{u}_s))$ a été modélisé par l'intermédiaire du terme de forçage qui est exprimé dans le modèle de Guo et al [51] par :

$$F_\alpha = (1 - \frac{1}{2\tau}) \omega_\alpha \left[\frac{(\boldsymbol{\xi}_\alpha - \mathbf{u})}{c_s^2} + \frac{(\boldsymbol{\xi}_\alpha \cdot \mathbf{u})}{c_s^4} \boldsymbol{\xi}_\alpha \right] \cdot \mathbf{F} \quad (4.5)$$

où la vitesse du fluide est calculée selon :

$$\rho \mathbf{u} = \sum_\alpha \boldsymbol{\xi}_\alpha f_\alpha + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{F} \quad (4.6)$$

Nous pourrions résoudre cette équation en utilisant une approche implicite comme cela a été fait dans le chapitre précédent. Mais ceci risque d'être coûteux car il faudrait, à chaque pas de temps, et en chaque point du domaine de calcul, résoudre un système de 9 équations à 9 inconnues $f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8$ (pour le modèle $D2Q9$). Nous avons opté pour une procédure différente. Dans l'équation 4.6, les côtés gauche et droit sont écrits au même instant. Comme le terme de pénalisation contient la vitesse du fluide, on peut écrire celle-ci sous la forme :

$$\mathbf{u} = \frac{\sum_\alpha \boldsymbol{\xi}_\alpha f_\alpha + \frac{\Delta t}{2} \frac{\chi_i}{\eta} \rho \mathbf{u}_s}{\rho + \frac{\Delta t}{2} \frac{\chi_i}{\eta} \rho} \quad (4.7)$$

Avec cette méthode, même le terme force est traité de façon explicite dans l'équation de lattice Boltzmann, on n'a pas de problème de stabilité.

Une procédure semblable a été appliquée par Guo et Zhao [80] qui ont développé un modèle de lattice Boltzmann permettant de calculer des écoulements dans des milieux poreux (mais ces auteurs ne développaient pas la pénalisation volumique et ne s'intéressaient pas à des obstacles en mouvement).

D'après l'équation (4.7), on constate que dans le domaine fluide, la fonction masque $\chi_i = 0$, dans ce cas la pénalisation n'a pas d'influence, et la vitesse devient : $\mathbf{u} = \frac{1}{\rho} \sum_{\alpha} \xi_{\alpha} f_{\alpha}$. Par ailleurs, dans le domaine solide ($\chi_i = 1$), le terme $\frac{\chi_i}{\eta}$ tend vers l'infini, et la vitesse se résume à : $\mathbf{u} = \mathbf{u}_s$.

4.3 Applications et validation

Dans ce paragraphe, nous allons calculer l'écoulement autour d'une structure solide.

4.3.1 Caractérisation des grandeurs physiques étudiées

L'étude de l'évolution de l'écoulement autour d'une structure solide, est souvent liée à la caractérisation de grandeurs physiques telles que la longueur de la zone de recirculation L_r , les coefficients de traînée C_d et de portance C_l ainsi que le nombre de Strouhal St .

Le nombre de Reynolds qui régit l'écoulement est exprimé par :

$$Re = \frac{U_{max} D}{\nu} \quad (4.8)$$

Les coefficients C_d et C_l sont donnés par :

$$C_d = \frac{F_x}{\frac{1}{2} \rho U_{max}^2 D} \quad (4.9)$$

$$C_l = \frac{F_y}{\frac{1}{2} \rho U_{max}^2 D} \quad (4.10)$$

Où ρ est la densité du fluide prise à l'amont de l'obstacle, ν la viscosité cinématique, D est la longueur caractéristique du solide, U_{max} la vitesse maximale imposée à l'entrée du canal, F_x et F_y sont respectivement la force de la traînée et de la portance, évaluées dans notre cas par la méthode d'échange de quantité de mouvement. Ces deux composantes de la force résultent des actions de la pression et du frottement visqueux sur la structure solide par intégration sur sa surface.

Un autre coefficient important pris en considération dans nos simulations, est le nombre de Strouhal, calculé à partir de la longueur caractéristique D , la fréquence du détachement tourbillonnaire f et la vitesse maximale U_{max} .

$$St = \frac{f D}{U_{max}} \quad (4.11)$$

La fréquence f peut être calculée de la manière suivante :

$$f = \frac{U_t}{l} \quad (4.12)$$

Où U_t est la vitesse d'avancement des tourbillons, l , la distance entre deux tourbillons qui tournent dans le même sens. Une autre manière de faire c'est de calculer la période sur la variation de la vitesse verticale derrière l'obstacle. Dans la présente étude et comme c'était montré par Mukhopadhyay et al 1992 [81], la fréquence f vaut l'inverse de la période T du coefficient de portance C_l .

4.3.2 Condition d'incompressibilité

Dans nos simulations, nous nous sommes assurés que pour assurer l'incompressibilité de l'écoulement, le nombre de Mach M_a sans dimension, satisfait la condition suivante :

$$M_a = \frac{U_{max}}{c_s} \leq 0.1 \quad (4.13)$$

où U_{max} est la vitesse maximale à l'entrée du canal. c_s est la vitesse de propagation ou célérité du son dans le réseau considéré. Le nombre de Mach de l'écoulement doit être très faible pour que les effets de compressibilité soient négligés.

4.3.3 Convergence des calculs

Dans le cas où l'écoulement est stationnaire, nous avons choisi comme critère de convergence de la solution du problème :

$$\frac{\sqrt{\sum_{i=0}^N (u_i^{t+1} - u_i^t)^2}}{\sqrt{\sum_{i=0}^N (u_i^{t+1})^2}} \leq 1 \times 10^{-6} \quad (4.14)$$

Où N , représente la taille de la grille utilisée. u est la solution calculée à chaque instant t . Le calcul s'arrête lorsque cette condition est satisfaite.

4.3.4 Écoulement autour d'un obstacle carré immobile

Les résultats relatifs aux paramètres caractéristiques de l'écoulement autour d'une structure carrée sont présentés dans ce qui suit.

4.3.4.1 Présentation du domaine d'étude

Nous nous sommes intéressés à l'étude d'un écoulement incompressible bidimensionnel autour d'un obstacle carré. Le modèle à neuf vitesses discrètes $D2Q9$ est utilisé. Le domaine d'étude (voir figure 4.1) est un canal de longueur L et de largeur H . L'obstacle de largeur D est situé à une distance $L/4$ de l'entrée du canal, et à $H/2$ de la plaque inférieure, et les dimensions de l'obstacle vérifient la relation $H/D = 8$. La longueur du canal vérifie $L/D = 50$. À l'entrée du

canal, le profil de vitesse est parabolique avec une vitesse maximale U_{max} .

Pour appliquer les conditions aux limites de non glissement sur les parois du canal, et pour imposer le profil parabolique de vitesse à l'entrée du canal, nous avons utilisé pour la simulation avec la méthode de lattice Boltzmann, les conditions aux limites de bounce back de Zou et He [23]. À la sortie du canal, un gradient de vitesse nul a été appliqué, ceci a été fait avec la méthode de lattice Boltzmann grâce aux conditions d'extrapolation développées par Chen et al. (1996) [24].

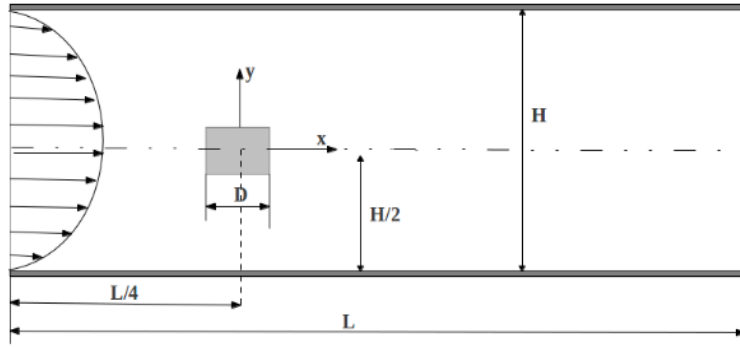


FIGURE 4.1 – Domaine d'étude, pour un écoulement autour d'une structure carrée

4.3.4.2 Discussion et validation des résultats

Dans cette section, on compare nos résultats de la pénalisation volumique avec ceux de Breuer et al 2000 [82], qui ont utilisé pour cette configuration la méthode des volumes finis, et la méthode de lattice Boltzmann accompagnée du bounce-back pour appliquer les conditions de non glissement sur les parois de l'obstacle.

La méthode des volumes finis a permis à Breuer et al d'utiliser des grilles non équidistantes, ce qui présente l'avantage de raffiner le maillage au voisinage du solide, et d'utiliser un maillage plus grossier dans des zones loin de l'obstacle. Par conséquent, moins de volumes de contrôle (mailles) sont nécessaires afin d'avoir la même précision que la LBM.

Nous avons réalisé des simulations avec la méthode de lattice Boltzmann et la pénalisation, pour plusieurs nombres de Reynolds. Des calculs ont aussi été faits en appliquant au niveau de l'obstacle les conditions aux limites de bounce back de Zou et He [23]. Plusieurs maillages réguliers ont été réalisés : une grille de 500×80 , une de 2000×320 et une de 3000×480 . Pour l'ensemble de nos calculs, un coefficient de pénalisation $\eta = 10^{-9}$ a été employé. Plusieurs grandeurs ont été comparées.

A. Différents régimes d'écoulement

Nous présentons tout d'abord quelques résultats que nous avons obtenus avec le maillage le plus fin 3000×480 , afin d'illustrer les régimes d'écoulement autour de l'obstacle.

Pour un nombre de Reynolds inférieur à 5, les forces de viscosité étant prédominantes. L'écoulement est symétrique par rapport à l'axe longitudinal et il se situe également entre l'amont et l'aval de l'obstacle (voir figure 4.2).

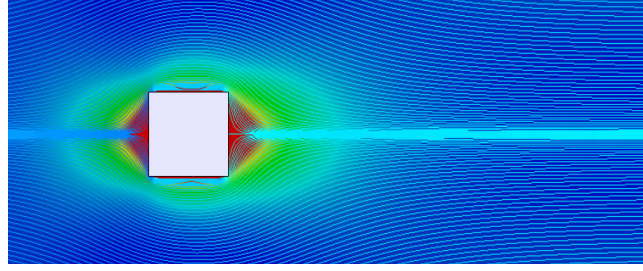
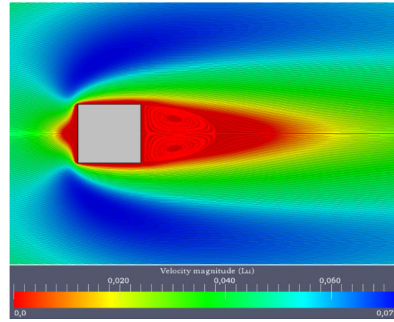
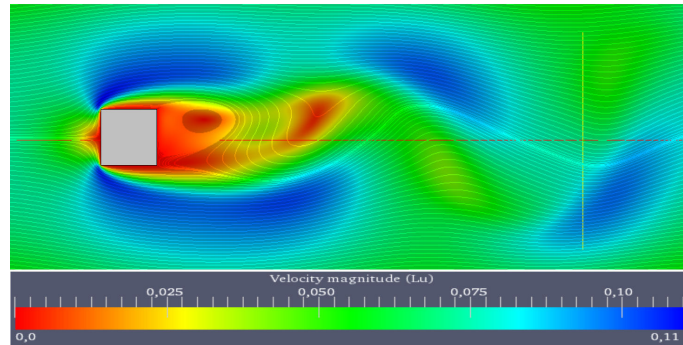


FIGURE 4.2 – Lignes de courant superposées sur les isovaleurs du module de vitesse, écoulement calculé autour d'un obstacle carré avec la pénalisation volumique, $Re=1$

Pour $5 \leq Re < 60$, les forces d'inertie augmentent et empêchent la couche limite de rester attachée à l'obstacle. On observe un décollement de chaque côté de l'obstacle. L'écoulement est stable, il reste stationnaire et symétrique par rapport à l'axe longitudinal. En aval du décollement se forment deux lobes de recirculation contrarotatifs attachés à l'obstacle (voir figure 4.3, (a)).



(a) $Re = 40$



(b) $Re = 100$

FIGURE 4.3 – Lignes de courant superposées sur les isovaleurs du module de vitesse, écoulement calculé autour d'un obstacle carré avec la pénalisation volumique a) $Re=40$, b) $Re=100$.

La transition d'un état stationnaire de l'écoulement à un état instationnaire s'effectue pour un nombre de Reynolds critique de 60. Comme on peut le constater sur la figure 4.3 (b), le sillage derrière la structure devient dissymétrique et commence à osciller. Cette dissymétrie est due à l'augmentation de l'amplitude des fluctuations de vitesse dans ce sillage. Des instabilités se développent dans la zone de recirculation et s'amplifient avec l'augmentation du nombre de Reynolds. On assiste alors à l'apparition de paire de tourbillons alternés de signes opposés qui se détachent derrière l'obstacle.

B. Influence du maillage sur les résultats

a). Longueur de recirculation " L_r " derrière l'obstacle

Nous avons tout d'abord comparé les résultats en terme de longueur de recirculation, obtenus avec les différents maillages testés.

Si on prend le côté aval du solide comme origine des abscisses, la longueur de recirculation (L_r) est définie comme étant l'abscisse du point où la vitesse longitudinale est nulle sur l'axe central du sillage derrière l'obstacle. Sur la figure 4.4, où sont superposées les lignes de courant sur les isovaleurs du module de vecteur vitesse, nous pouvons voir l'évolution de la longueur (L_r) en fonction du nombre de Reynolds pour la grille (2000×320).

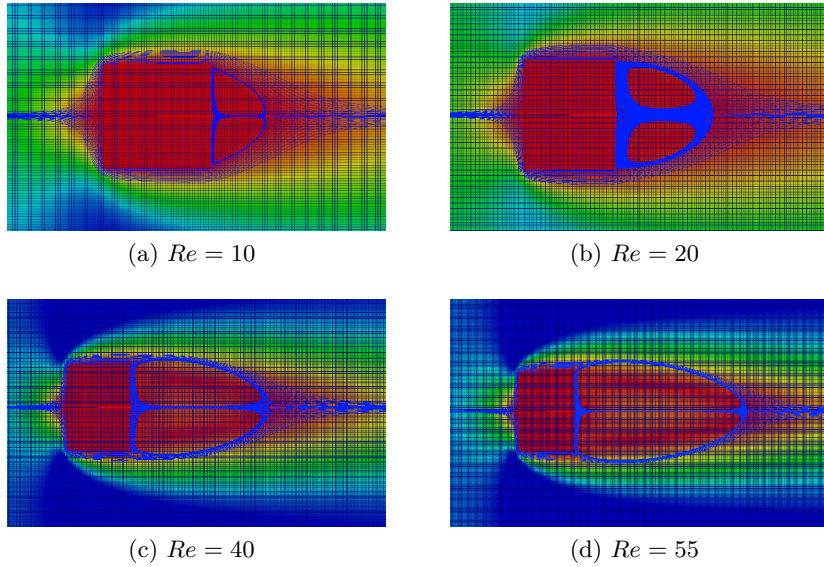


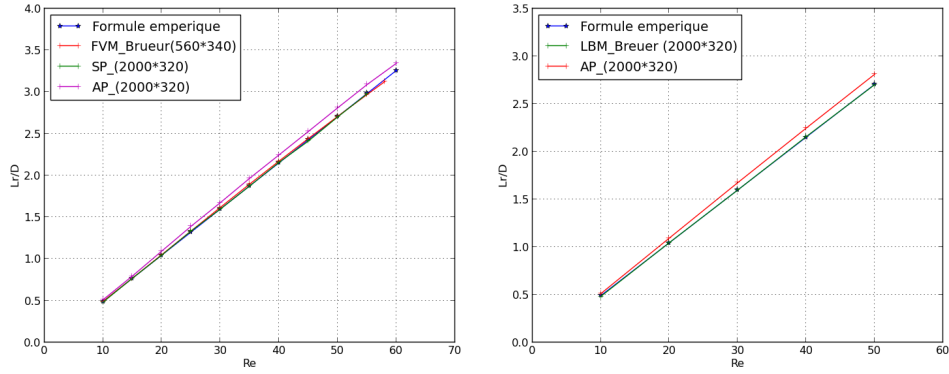
FIGURE 4.4 – Lignes de courant superposées sur les isovaleurs du module de vitesse, écoulement calculé autour d'un obstacle carré avec la pénalisation volumique

Avec leurs résultats obtenus sur le maillage volumes finis le plus raffiné possible (maillage non équidistant, comprenant 560×340 mailles), Breuer et al. [82] ont établi la formule empirique suivante pour évaluer la longueur de recirculation, en fonction du nombre de Reynolds :

$$L_r/D = -0.065 + 0.0554Re \quad \text{pour } 5 < Re < 60 \quad (4.15)$$

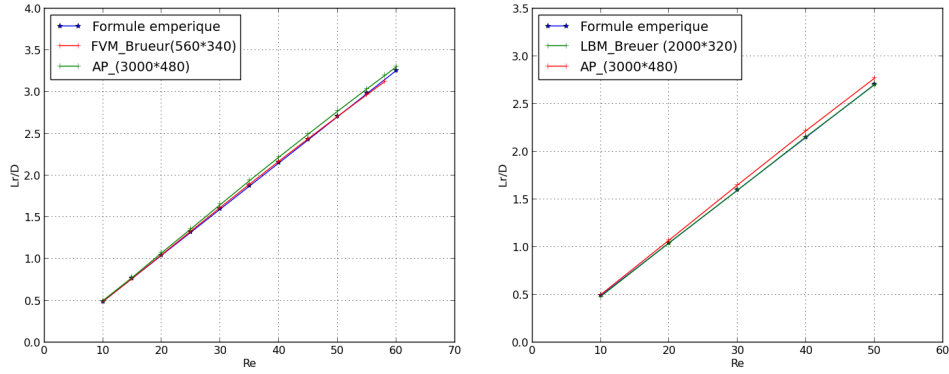
Sur la figure 4.5, où sont superposés les résultats obtenus avec la formule empirique 4.15, ceux obtenus avec les calculs volumes finis de Breuer et al., ceux que nous avons obtenus avec la LBM combinée avec la pénalisation volumique (maillage 2000), et aussi ceux que nous avons obtenus avec la LBM et les conditions aux limites de bounce back de Zou et He (maillage 2000), ainsi que ceux obtenus par Breuer et al. avec la LBM, nous constatons que nos résultats sont en bon accord avec ceux donnés par la formule 4.15. De plus, on peut remarquer que l'écart diminue lorsque le nombre de mailles de nos calculs LBM augmente (maillage 3000×480) (voir figure 4.6).

Les deux tableaux 4.1 et 4.2 présentent les résultats de l'erreur relative et absolue sur L_r . On remarque des grands écarts des résultats obtenus de la pénalisation volumique par rapport à la formule 4.15 sur la grille 500×80 . Par contre, les résultats sont meilleurs sur la grille 3000×480



(a) Comparaison avec FVM de Breuer et al. (b) Comparaison avec LBM de Breuer et al.

FIGURE 4.5 – Comparaison de la longueur L_r sur la grille 2000×320 . SP : sans pénalisation (bounce back de Zou et He) et LBM, AP : avec pénalisation et LBM.



(a) Comparaison avec FVM de Breuer et al. (b) Comparaison avec LBM de Breuer et al.

FIGURE 4.6 – Comparaison de la longueur L_r sur la grille 3000×480 . SP : sans pénalisation (bounce back de Zou et He) et LBM, AP : avec pénalisation et LBM.

Re	500×80	2000×320	3000×480
20	10.966	4.697	2.819
40	12.971	4.398	2.606
60	-	2.606	1.341

TABLE 4.1 – Erreur relative (%) sur L_r par rapport à la formule 4.15

où l'erreur relative varie entre 1 et 3 %. Cela veut dire que la méthode de pénalisation volumique appliquée à la LBM, donne des meilleurs résultats sur des maillages conséquents.

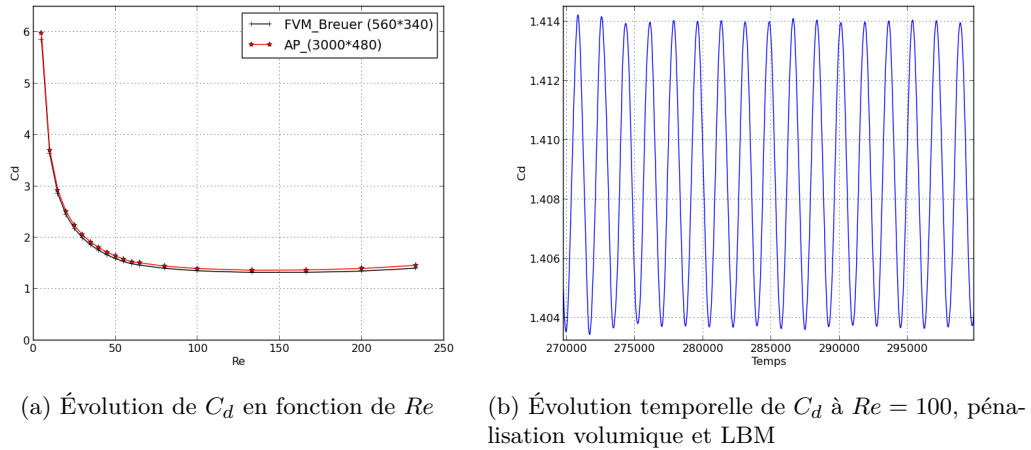
Re	500×80	2000×320	3000×480
20	0.107	0.049	0.029
40	0.279	0.095	0.070
60	-	0.085	0.044

TABLE 4.2 – Erreur absolue sur L_r par rapport à la formule 4.15

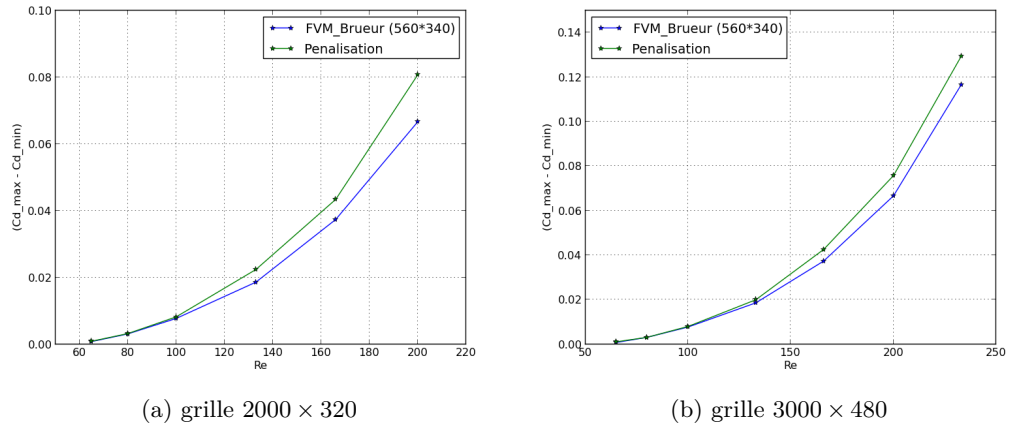
b). Coefficient de traînée " C_d "

Nous avons aussi comparé les résultats en termes coefficient de traînée, obtenus avec les différents maillages testés.

Les résultats relatifs au coefficient de traînée pour la grille 2000×320 sont illustrés sur la figure 4.7. Dans tous les cas étudiés, le C_d décroît avec le nombre de Reynolds, jusqu'au $Re = 166$, puis il augmente un peu. C'est la même constatation qu'on peut faire sur les résultats de Breuer et al [82]. Par ailleurs, en régime stationnaire le C_d converge vers une seule valeur constante, contrairement au régime instationnaire, où il oscille périodiquement entre deux valeurs minimale et maximale.

FIGURE 4.7 – Résultats relatifs au C_d sur la grille 2000×320

La différence entre C_{d-max} et C_{d-min} est présentée sur la figure 4.8, pour les deux maillages 2000×320 et 3000×480 . Les résultats de la pénalisation volumique sont meilleurs sur le maillage le plus fin, où on remarque des plus petits écarts par rapport aux résultats obtenus par Breuer et al. [82]. De plus, les tableaux 4.3 et 4.4, présentent l'erreur relative et absolue sur le C_d (l'erreur a été calculée par rapport aux résultats, avec les volumes finis sur un maillage resserré 560×340 , de Breuer et al.). On remarque que les résultats avec la pénalisation volumique et la LBM s'améliorent sur la grille 3000×480 , où l'erreur relative excède légèrement les résultats de Breuer et al avec un écart maximum de 3.8%. Cela confirme encore une fois que la pénalisation volumique appliquée à la LBM, donne des bons résultats avec des maillages denses.


 FIGURE 4.8 – Comparaison des ΔC_d

Re	2000×320	3000×480
20	3.416	2.752
40	3.810	3.069
60	3.286	2.478
80	3.846	3.105
100	4.030	3.268
150	4.433	3.405
200	4.712	3.711

 TABLE 4.3 – Erreur relative (%) sur le C_d

Re	2000×320	3000×480
20	0.083	0.067
40	0.067	0.054
60	0.056	0.049
80	0.054	0.043
100	0.054	0.044
150	0.057	0.046
200	0.063	0.050

 TABLE 4.4 – Erreur absolue sur le C_d

c). Coefficient de portance " C_l "

Nous avons comparé les résultats concernant le coefficient de portance, obtenus avec les différents maillages testés. Ce coefficient représente la composante verticale de la force qu'exerce le fluide sur le solide.

L'analyse des résultats obtenus, nous conduit à constater qu'en régime stationnaire le coefficient de portance est nul, la force de portance est très faible devant la force de trainée. C'est à partir d'un Reynolds critique égal à 60 que le coefficient de portance évolue de manière sinusoïdale autour d'une valeur moyenne.

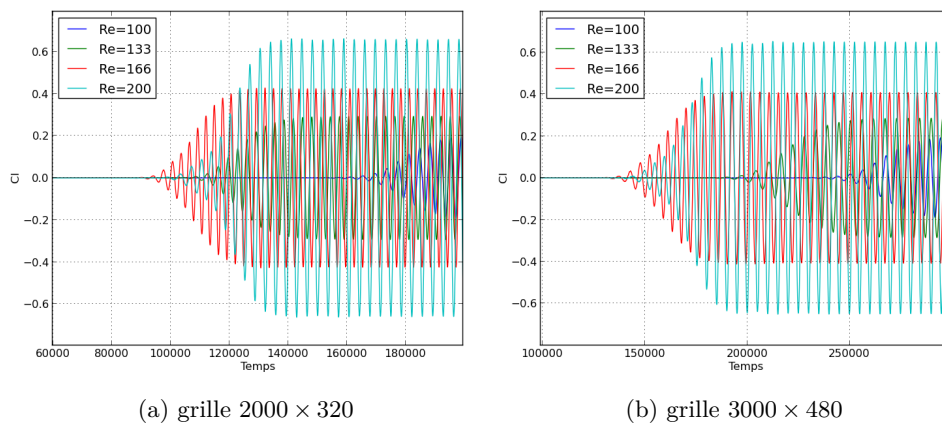
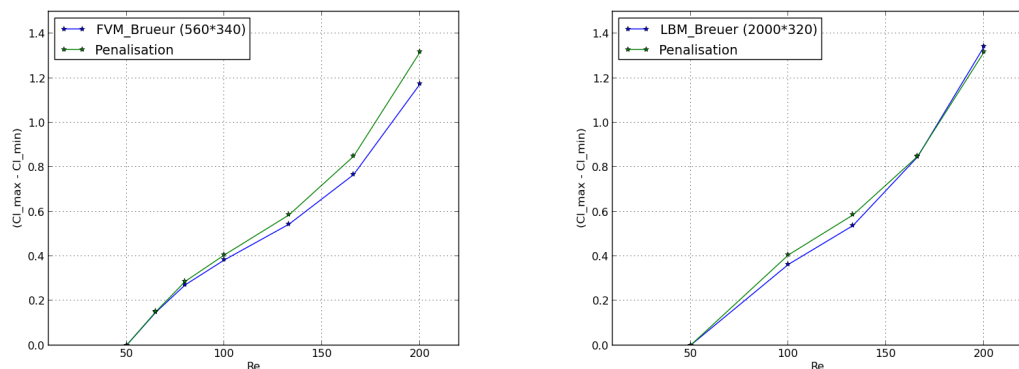


FIGURE 4.9 – Évolution temporelle de C_l à différents Re , LBM avec pénalisation

Sur la figure 4.9, où nous représentons l'évolution temporelle du coefficient de portance pour plusieurs valeurs du nombre de Reynolds, nous remarquons que l'amplitude de C_l augmente avec le nombre de Reynolds. De plus, le temps nécessaire pour que les instabilités apparaissent est inversement proportionnel au nombre de Reynolds.



(a) Comparaison avec les résultats FVM de Breuer et al [82]

(b) Comparaison avec les résultats LBM de Breuer et al [82]

FIGURE 4.10 – Comparaison des ΔC_l sur la grille 2000×320

De plus, les deux figures 4.10 et 4.11 illustrent, la variation de ΔC_l en fonction du nombre de Reynolds. Les résultats de la pénalisation volumique et de la LBM sont un peu supérieurs à ceux obtenus par Breuer et al [82] avec les volumes finis et un maillage resserré de 560×340 mailles.

L'écart diminue lorsque le maillage utilisé pour les calculs LBM et la pénalisation volumique est plus dense (maillage de 3000×480).

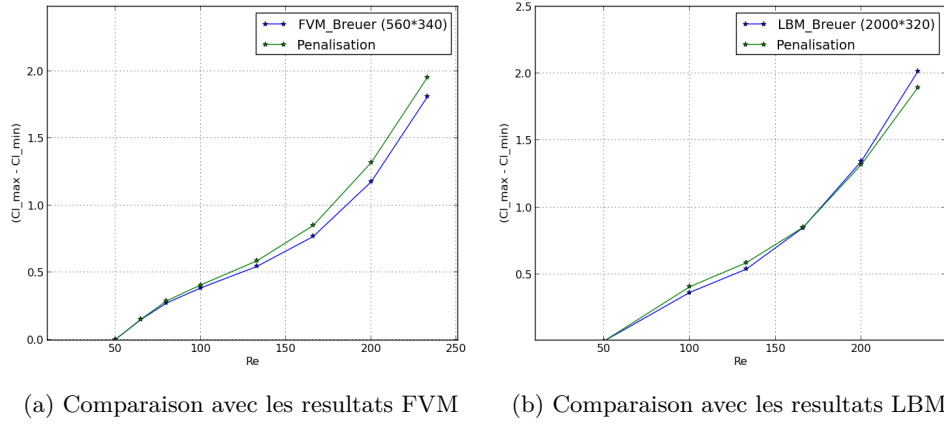


FIGURE 4.11 – Comparaison des ΔC_l sur la grille 3000×480

À la fin de cette section, on peut dire que la pénalisation volumique combinée avec la LBM, donne des résultats acceptables sur le C_l .

d). Nombre de Strouhal " St "

On distingue également, parmi les paramètres caractéristiques le nombre de Strouhal, qui définit la fréquence du lâcher tourbillonnaire derrière l'obstacle. Nous avons comparé le nombre de Strouhal, obtenu avec la pénalisation volumique et la méthode de lattice Boltzmann, sur les deux maillages 2000×320 et 3000×480 , par rapport aux résultats obtenus par Breuer et al avec la méthode des volumes finis, et le maillage le plus resserré possible (560×340), ainsi que ceux obtenus par Breuer et al avec la méthode de lattice Boltzmann et une grille de 2000×320 mailles.

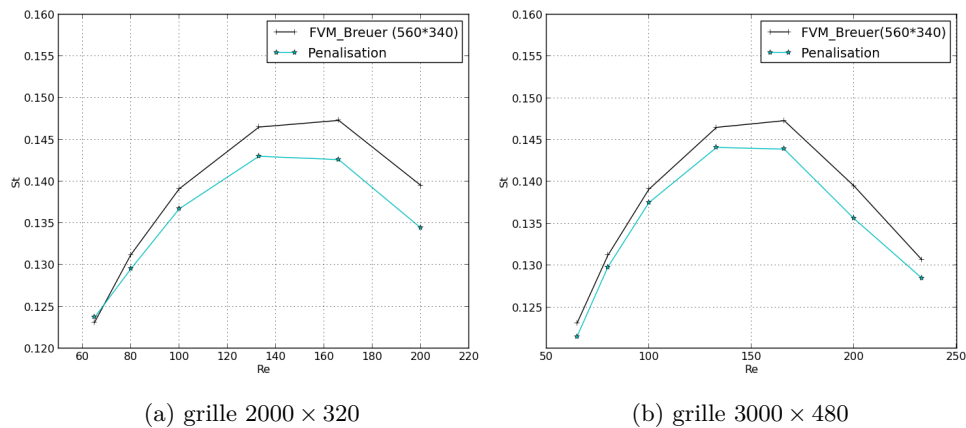


FIGURE 4.12 – Comparaison de " St " obtenus avec la pénalisation volumique et la LBM, avec les résultats FVM de Breuer

La figure 4.12, compare les résultats de la pénalisation avec ceux obtenus par Breuer par la

méthode des volumes finis (FVM). On remarque que pour un $Re < 166$, le nombre de Strouhal est proportionnel au nombre de Reynolds, au delà de cette valeur de Re , le Strouhal diminue. Pour la grille de 3000×480 , la différence entre les résultats obtenus avec la méthode des volumes finis, et ceux obtenus avec la méthode de la pénalisation volumique associée à la LBM diminue. De plus, un très bon accord est obtenu lorsqu'on compare les résultats de la pénalisation volumique associée à la LBM, avec ceux de la LBM obtenus par Breuer (voir figure 4.13).

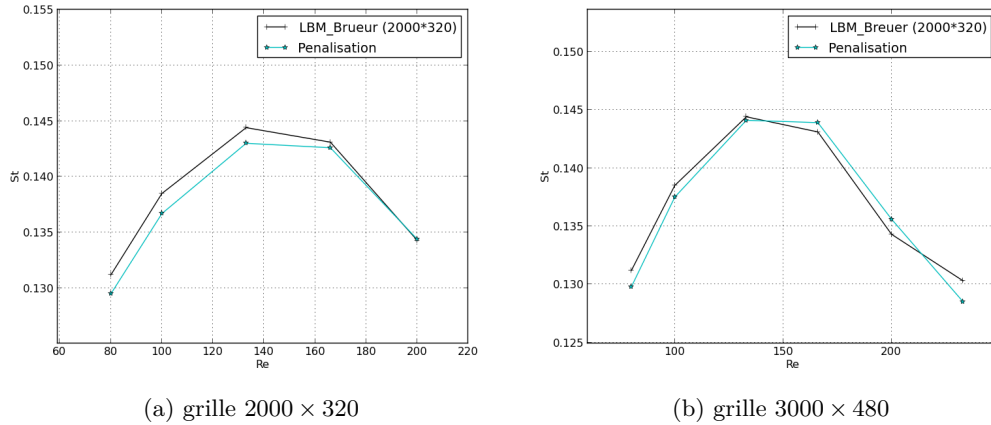


FIGURE 4.13 – Comparaison de " St " obtenus avec la pénalisation volumique et la LBM, avec les résultats LBM de Breuer

En outre, le tableau 4.5, présente l'erreur relative de la pénalisation volumique par rapport aux résultats FVM de Breuer et al. On observe une erreur maximale relative de 3.67% sur la grille 2000×320 , et de 2.80% sur la grille 3000×480 . De plus, la comparaison de nos résultats avec ceux de Breuer et al obtenus avec la méthode LBM (voir tableau 4.6), montre une erreur relative maximale de 1.15% sur la grille 3000×480 . Cela nous amène donc à dire que les résultats issus de la pénalisation volumique combinée avec la LBM, sont très acceptables.

Re	2000×320	3000×480
80	1.2914	1.056
100	1.7439	1.181
133	2.3662	1.618
166	3.1647	2.304
200	3.6709	2.779
233	-	1.684

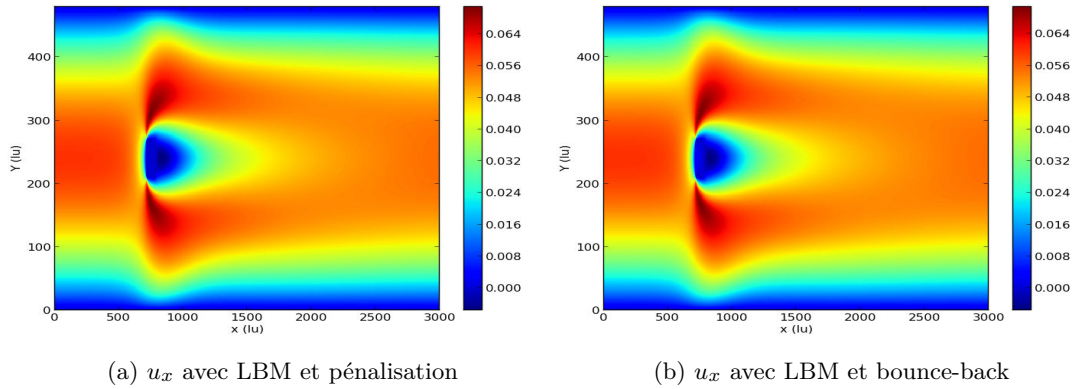
TABLE 4.5 – Erreur relative (%) sur le St par rapport aux résultats FVM de Breuer

Re	2000×320	3000×480
80	1.2914	1.056
100	1.3182	0.753
133	0.9463	0.187
166	0.3225	0.564
200	0.0589	1.067
233	-	1.151

TABLE 4.6 – Erreur relative (%) sur le St par rapport aux résultats LBM de Breuer

C. Comparaison des résultats de la LBM associée à la pénalisation volumique avec ceux de la LBM associée à bounce back

Dans ce paragraphe, nous comparons nos résultats obtenus avec le maillage le plus fin, issus des calculs LBM accompagnés des conditions aux limites de bounce back de Zou et He au niveau de l'obstacle d'une part, et ceux issus des calculs LBM combinés avec la méthode de la pénalisation volumique d'autre part.

FIGURE 4.14 – Comparaison de u_x à $Re = 40$ sur la grille 3000×480

Sur la figure 4.14, où sont représentées les isocontours de vitesse horizontale, obtenues avec les deux méthodes, nous pouvons remarquer que les vitesses obtenues par la LBM et la pénalisation volumique d'une part, et celles obtenues avec la LBM et le bounce back d'autre part, sont en très bon accord. De plus, la figure 4.15 montre une parfaite superposition des profils de vitesse horizontale u_x à différentes sections transversales du canal, derrière l'obstacle, à un même instant ($t=666,67s$) pour un nombre de Reynolds égal à 100. La même constatation peut se faire sur les profils de vitesse u à mi-hauteur du canal, le long du canal (voir figure 4.16), où on voit d'importantes fluctuations de vitesse u derrière l'obstacle. On compare sur la figure 4.17 (a) et (b), l'énergie cinétique du système étudié pour un nombre de Reynolds de 20 et un nombre de Reynolds de 40. On constate que les deux méthodes (pénalisation volumique et bounce-back), ont la même convergence en temps vers la même solution.

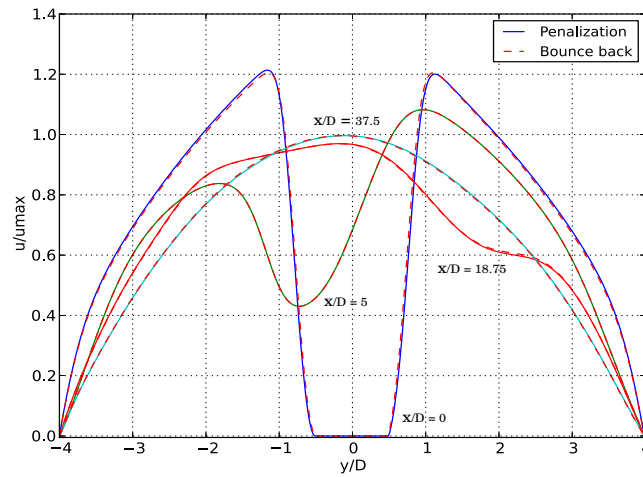


FIGURE 4.15 – Profils de vitesse longitudinale dans des plans perpendiculaires à la direction de l'écoulement obtenus à $t = 666,67s$, $Re = 100$

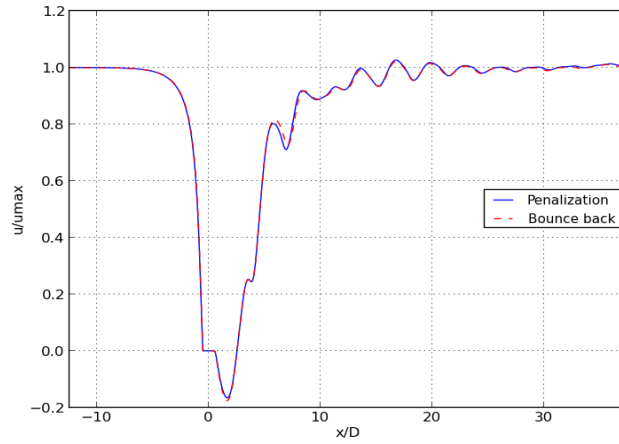


FIGURE 4.16 – Profils de vitesse longitudinale, à mi-hauteur du canal, dans la direction de l'écoulement, obtenus à $t = 666,67s$, $Re = 100$

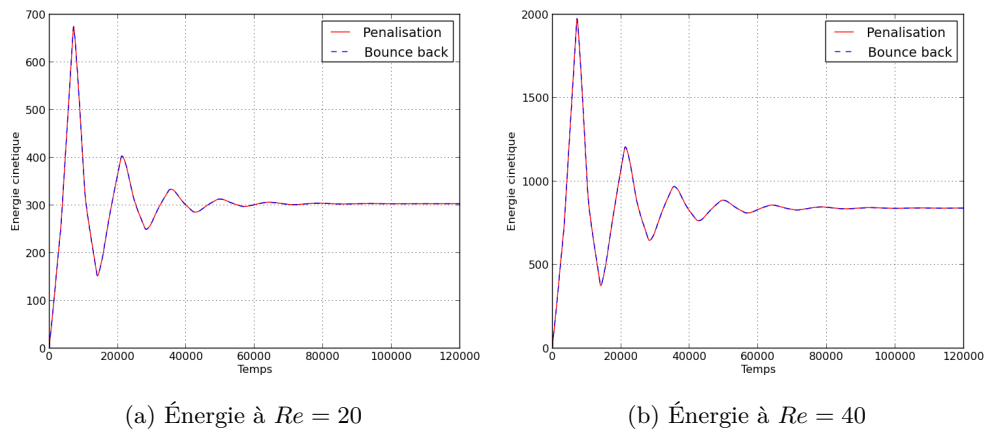


FIGURE 4.17 – Comparaison de l'énergie cinétique à $Re = 20$ et 40 , grille 3000×480

4.3.5 Écoulement autour d'un obstacle circulaire immobile

Après avoir traité le cas de l'écoulement autour d'un carré, nous avons calculé un écoulement autour d'un cylindre immobile.

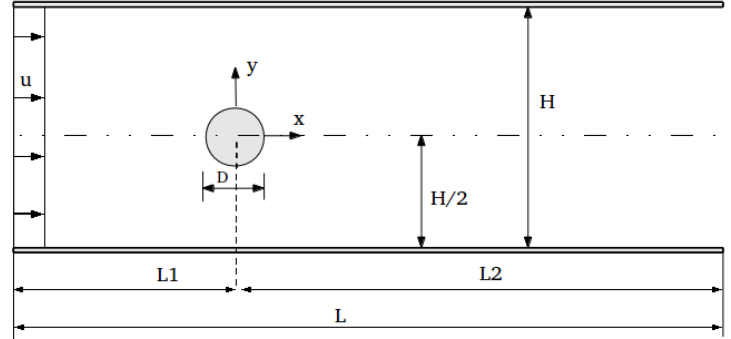


FIGURE 4.18 – Domaine d'étude, pour un écoulement autour d'une structure circulaire immobile

4.3.5.1 Présentation du domaine d'étude

Nous nous intéressons ici à un écoulement autour d'un obstacle circulaire de diamètre D , comme représenté sur la figure 4.18. Les dimensions du domaine sont : $L1 = 15D$, $L2 = 30D$, $H = 60D$. Les conditions aux limites sur les parois horizontales supérieure et inférieure sont des conditions aux limites de symétrie (la hauteur H est suffisamment grande pour que les parois horizontales ne perturbent pas l'écoulement), un profil de vitesse horizontale est appliqué à l'entrée du canal, et à la sortie du canal un gradient de vitesse nul est appliqué.

Comme la frontière de l'obstacle est circulaire, cette configuration est plus compliquée que la précédente. Un grand nombre de mailles a été nécessaire pour calculer l'écoulement. Nous présentons dans ce paragraphe les résultats obtenus avec le maillage le plus fin : 1845×2460 mailles.

Nous avons effectué deux types de calcul avec la méthode de lattice Boltzmann : d'une part la pénalisation volumique (avec un coefficient de pénalisation $\eta = 10^{-9}$), d'autre part des conditions aux limites de type bounce back, et plus particulièrement le bounce back développé par Bouzidi et al. [32] pour des écoulements autour de frontières curvilignes, avec une interpolation quadratique.

4.3.5.2 Discussion et validation des résultats

Comme nous l'avons fait pour l'obstacle carré, nous allons confronter nos résultats à ceux de la littérature. Pour cela, on vérifie la longueur de recirculation derrière le cylindre L_r , le coefficient de traînée C_d et de portance C_l ainsi que la nombre de Strouhal St .

A. Différents régimes d'écoulement

Nous avons tout d'abord remarqué que, dans notre combinaison de la pénalisation volumique avec la LBM, le nombre de Reynolds critique $Re_c \approx 45$ est très proche de celui qu'on trouve dans la littérature $Re_c \approx 47$.

La figure 4.19 (a) et (b), montre que pour un $Re < Re_c$ ($Re=20$ et $Re=40$), l'écoulement reste stationnaire, symétrique par rapport au plan horizontal contenant l'axe du cylindre. Lorsque le nombre de Reynolds atteint sa valeur critique ($Re_c \approx 45$), l'écoulement devient instationnaire.

Des tourbillons se détachent alternativement de chaque côté de l'obstacle pour former une allée de tourbillons (voir figures 4.19 (c) et (d)).

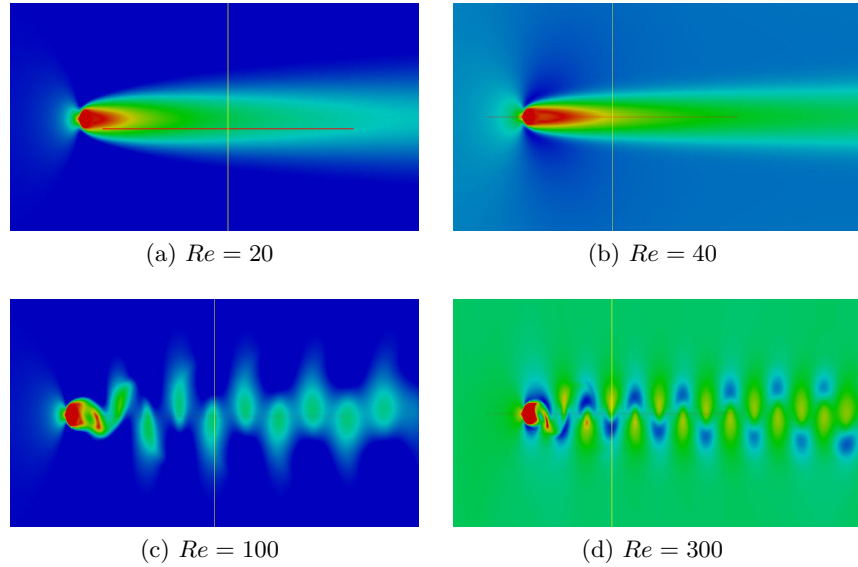


FIGURE 4.19 – Champs de vitesse obtenus avec la LBM et la pénalisation volumique, pour différentes valeurs du nombre de Reynolds

B. Longueur de recirculation " L_r " derrière l'obstacle

Comme on l'a vu précédemment, en régime stationnaire, la longueur de recirculation L_r , correspond à la distance entre le cylindre et le point pour lequel la vitesse du fluide est nulle.

On remarque sur la figure 4.20, deux zones de recirculation qui apparaissent derrière le cylindre, dont la longueur L_r augmente avec le nombre de Reynolds. Ces zones de recirculation tendent à disparaître lorsque le nombre de Reynolds atteint sa valeur critique.

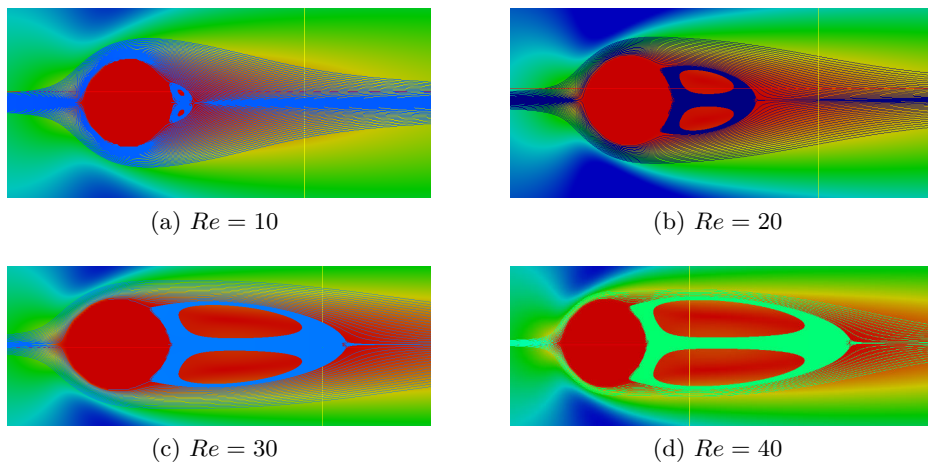


FIGURE 4.20 – Lignes de courant superposées sur les isovalues du module de vitesse, écoulement calculé autour d'un obstacle circulaire avec la pénalisation volumique

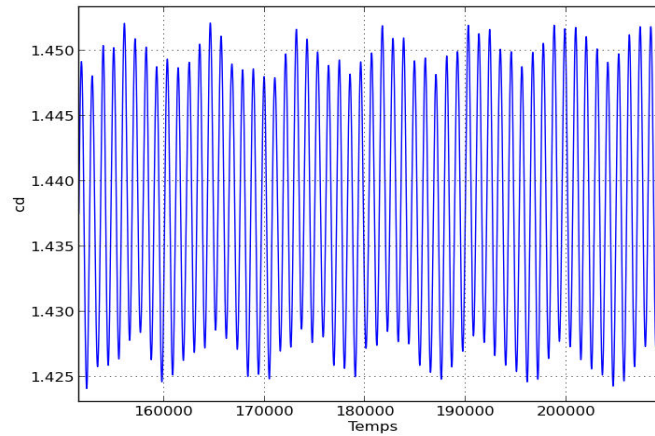
De plus, le tableau 4.7, compare les résultats de la pénalisation volumique associée à la LBM, avec d'autres travaux basés sur la LBM, issus de la littérature. Cette comparaison montre que les résultats de la pénalisation sont dans la limite acceptable. On peut en conclure donc que les résultats relatifs à la longueur L_r sont globalement satisfaisants.

Re	Pénalisation	Bounce back	Zhou & al [83]	He & Doolen [84]	Wu & Shu [57]
20	1.02	0.92	0.92	0.92	0.93
40	2.36	2.32	2.20	2.25	2.31

TABLE 4.7 – Comparaison de la longueur de recirculation L_r

C. Coefficient de traînée " C_d "

Comme dans le cas du carré, nous remarquons qu'en régime stationnaire le C_d converge vers une valeur constante. Pour un régime instationnaire, le C_d oscille entre une valeur maximale et minimale (voir figure 4.21).

FIGURE 4.21 – Évolution temporelle du coefficient de traînée C_d à $Re = 100$, méthode de la pénalisation volumique combinée avec la LBM

On compare sur le tableau 4.8 les résultats du coefficient de traînée C_d en régime stationnaire à $Re = 20$ et $Re = 40$, aux résultats de la littérature obtenus avec la LBM (Zhou et al. [83], He et Doolen [84], Wu et Shu [57]) et les résultats expérimentaux de Tritton [85]. Pour ces deux nombres de Reynolds on voit que les résultats de la pénalisation volumique et la LBM, ainsi que les résultats de la LBM et du bounce back quadratique, sont situés dans l'intervalle des résultats de la littérature. La même constatation peut se faire en régime instationnaire sur le C_d moyen à $Re = 100$ (voir tableau 4.9).

Re	Pénalisation	Bounce back	Zhou & al [83]	He & Doolen [84]	Wu & Shu [57]	Tritton [85]
20	2.10	2.07	2.30	2.15	2.09	2.22
40	1.59	1.56	1.70	1.50	1.57	1.48

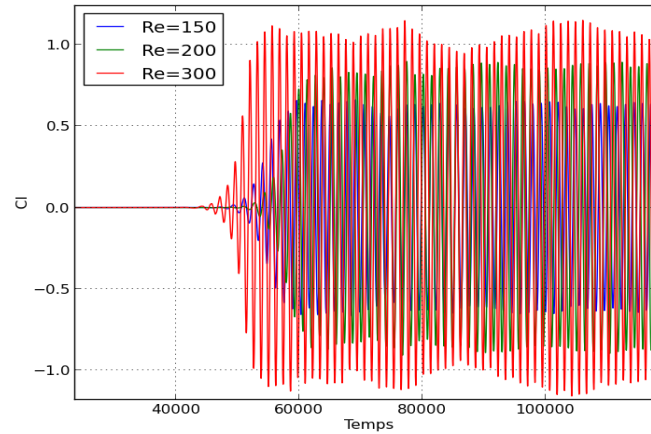
TABLE 4.8 – Comparaison de C_d à $Re = 20$ et 40

Re	Pénalisation	Bounce back	Zhou & al [83]	Wu & Shu [57]
100	1.440	1.407	1.428	1.364

TABLE 4.9 – Comparaison de C_{d-moy} à $Re = 100$

D. Coefficient de portance " C_l "

La figure 4.22 montre l'évolution temporelle du coefficient de portance C_l à différents nombres de Reynolds. En régime stationnaire la force de portance est nulle. Par contre, en régime instationnaire, le C_l oscille entre deux valeurs maximale et minimale, l'écoulement génère sur l'obstacle des forces de portance fluctuantes. Par ailleurs, l'amplitude de C_l augmente avec le nombre de Reynolds, cependant, le temps nécessaire pour que les instabilités apparaissent est inversement proportionnel au nombre de Reynolds.

FIGURE 4.22 – Évolution temporelle du C_l pour différents nombres de Reynolds, LBM avec la pénalisation

Sur le tableau 4.10, nous comparons les résultats relatifs au C_l à $Re = 100$. On remarque que là aussi, les résultats de la pénalisation volumique et de la LBM sont proches de ceux issus de la littérature. Néanmoins on constate que les résultats que nous avons obtenus avec la LBM et le bounce back quadratique, sont plus proches de ceux de la littérature, que ceux obtenus avec la LBM et la pénalisation volumique.

Re	Pénalisation	Bounce back	Zhou & al [83]	Wu & Shu [57]
100	0.380	0.369	0.315	0.344

TABLE 4.10 – Comparaison de $(Cl_{max} - Cl_{min})_{av}/2$ à $Re = 100$

E. Nombre de Strouhal " St "

Le nombre de Strouhal calculé avec la LBM et la pénalisation volumique, et avec la LBM et le bounce back quadratique de Bouzidi et al, est présenté dans le tableau 4.11. Nous pouvons remarquer un très bon accord avec les résultats de la littérature issus de calculs LBM (Zhou et al. [83], Wu et Shu [57]) et les résultats expérimentaux de Williamson [86].

Re	Pénalisation	Bounce back	Zhou & al [83]	Wu & Shu [57]	Williamson [86]
100	0.165	0.168	0.172	0.163	0.166

TABLE 4.11 – Comparaison de St à $Re = 100$

F. Comparaison des résultats de la LBM associée à la pénalisation volumique avec ceux de la LBM associée à bounce back

On présente ici une comparaison pour un nombre de Reynolds égal à 100, des résultats obtenus à l'instant $t=428,32s$, de la LBM et de la pénalisation volumique avec ceux obtenus par la LBM et l'approche de bounce-back, où les conditions de non glissement de Bouzidi et al [32] avec interpolation quadratique sont appliquées sur la frontière solide de l'obstacle.

Les figures 4.23 et 4.24 comparent les profils de vitesse u_x à mi-hauteur, le long du canal, et dans des plans perpendiculaires à la direction de l'écoulement, au niveau de l'obstacle, et en aval de l'obstacle. On constate que les profils de vitesse comparés sont quasi-identiques. De plus, avec la figure 4.23, on peut remarquer d'importantes fluctuations spatiales en aval du cylindre, dues au lâcher tourbillonnaire dans le sillage du cylindre.

Nous avons aussi tracé sur la figure 4.25, l'évolution temporelle de l'énergie cinétique. On constate que les deux méthodes (pénalisation volumique et bounce-back), convergent en un même nombre d'itérations vers la solution. De plus, les temps de calcul pour les deux méthodes sont similaires.

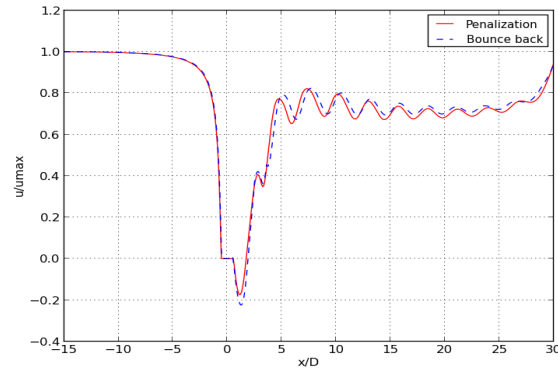
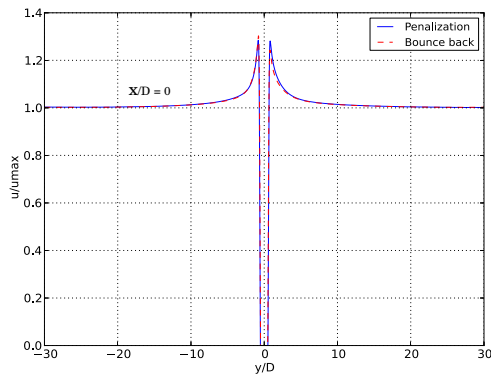
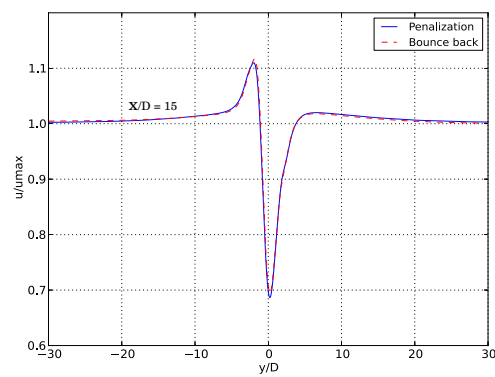


FIGURE 4.23 – Profils de vitesse longitudinale, à mi-hauteur, le long du canal, pour un nombre de Reynolds égal à 100, à l'instant $t = 428,32s$. Calculs effectués avec la LBM et la pénalisation volumique, et avec la LBM et le bounce back quadratique.



(a) Profils de vitesse u_x à l'obstacle



(b) Profils de vitesse u_x derrière l'obstacle

FIGURE 4.24 – Profils de vitesse longitudinale dans des plans perpendiculaires à la direction de l'écoulement obtenus à $t = 428,32s$, pour un nombre de Reynolds égal à 100. Calculs effectués avec la LBM et la pénalisation volumique, et avec la LBM et le bounce back quadratique.

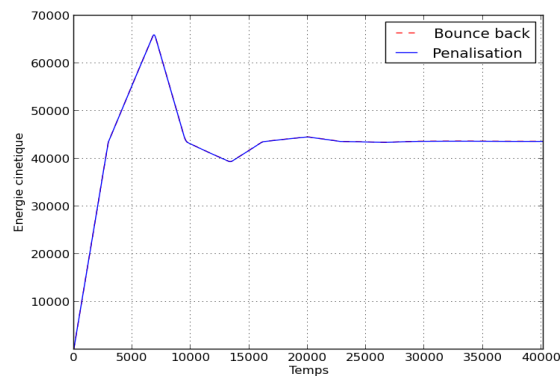


FIGURE 4.25 – Evolution temporelle de l'énergie cinétique, pour un nombre de Reynolds égal à 100. Calculs effectués avec la LBM et la pénalisation volumique, et avec la LBM et le bounce back quadratique.

4.3.6 Écoulement autour d'un obstacle circulaire mobile

Dans cette partie, la pénalisation volumique couplée avec la LBM est appliquée au cas d'un cylindre oscillant dans un écoulement transverse à Reynolds $Re = 20$ (figure 4.26).

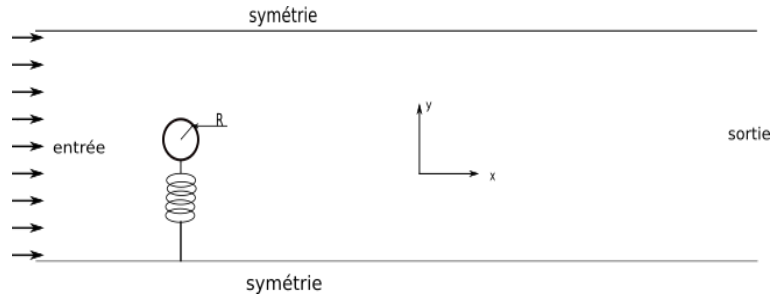


FIGURE 4.26 – Schématisation de la configuration étudiée

On note U_{max} la vitesse à l'entrée du canal et D le diamètre du cylindre.

Les données LBM sont $\tilde{U}_{max} = 0.0229$, $\tilde{D} = 29$, $\tau = 0.6$. Afin de garder un maillage précis autour du cylindre, tout en limitant le nombre de nœuds, le calcul a été effectué avec 2 degrés de raffinements autour de l'obstacle (cf chapitre 1.6.3). La grille initiale est de taille 580×290 , le premier raffinement est de 353×353 et le dernier 349×349 . Ainsi, sur la grille la plus fine, l'obstacle contient 116 nœuds dans son diamètre.

Les résultats sont comparés avec ceux issus d'un code de CFD volumes finis, Code_Saturne [87]. Code_saturne utilise la méthode ALE (cf chapitre 2.6) pour la résolution des équations de Navier-Stokes sur maillage mobile, et un couplage implicite pour la résolution du déplacement de la structure. La méthode que nous proposons sera ainsi validée par rapport à une méthode classique de résolution en interaction fluide structure. Les calculs avec Code_saturne ont été faits avec un maillage hexaédrique non régulier contenant 64892 mailles.

Les comparaisons se feront sur les coefficients de trainée C_d , de portance C_l ainsi que sur les fréquences adimensionnalisées d'oscillation.

4.3.6.1 Adimensionalisation de la structure

On considère un cylindre couplé avec un ressort, dont seul le mouvement selon l'axe vertical est autorisé. Le déplacement de la structure est régi par l'équation suivante :

$$m\ddot{y} + k(y - y_{eq}) = F_y \quad (4.16)$$

Avec m la masse du cylindre, k la raideur du ressort, y_{eq} la position à l'équilibre et F_y les efforts de portance.

Les règles d'adimensionalisation de Shiels *et al.* [88] ont été utilisées :

$$y^* = \frac{y}{D} \quad m^* = \frac{m}{0.5\rho D^2} \quad k^* = \frac{k}{0.5\rho U_{\infty}^2} \quad t^* = t \frac{U_{max}}{D} \quad (4.17)$$

Ainsi, l'équation adimensionalisée pour la structure devient :

$$m^*\ddot{y}^* + k^*(y^* - y_{eq}^*) = C_l \quad (4.18)$$

Cette adimensionalisation permet de comparer aisément les résultats issus de la LBM et

de `code_saturne`, et de s'assurer que la résolution de la structure sera la même dans les deux simulations.

Dans le cadre de cette étude, les paramètres choisis sont :

$$m^* = 10 \text{ et } k^* = 3.56 \quad (4.19)$$

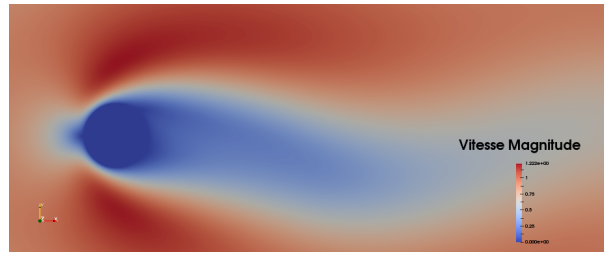
Initialement le cylindre est écarté de sa position d'équilibre, de la moitié de son diamètre.

4.3.6.2 Cylindre en oscillation forcée

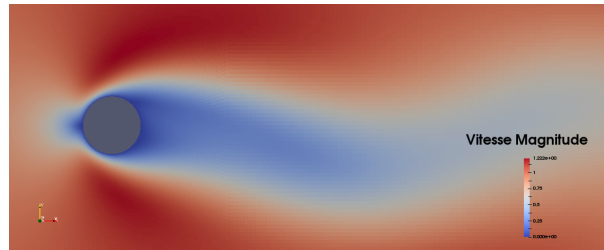
Le premier test s'effectue sur un cas de déplacement imposé, les efforts fluides F_y étant annulés dans l'équation (4.16). Initialement le cylindre étant à une distance égale au quart de son diamètre, son déplacement suivra l'équation suivante :

$$y(t) = \left(y_0 - \frac{D}{4}\right) + \frac{D}{4} \cos(\omega t) \quad (4.20)$$

avec $y_0 = y(t = 0)$. La figure 4.27 représente le champ de vitesses adimensionnées obtenu par la LBM avec pénalisation volumique (a) et par Code_Saturne (b) au bout de 10 oscillations du cylindre. On remarque une bonne concordance des champs de vitesse entre les deux simulations.



a) LBM



b) Code_saturne

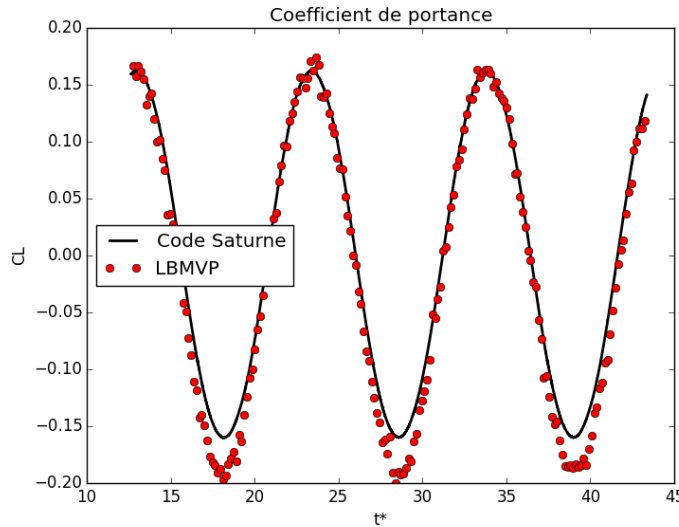
FIGURE 4.27 – Comparaison des champs de vitesse adimensionnés obtenus par a) LBM et b) Code_saturne

Le tableau 4.12 récapitule les coefficients de traînée moyens, la moyenne quadratique du coefficient de portance ainsi que sa valeur maximale. On observe que ceux-ci sont assez proches.

On observe sur la figure 4.28, que les valeurs de C_l sont superposées. La période est logiquement conservée, celle-ci étant imposée par l'oscillation forcée du cylindre, et les amplitudes sont pratiquement les mêmes. On peut remarquer de légères oscillations du résultat obtenu par LBM et pénalisation volumique, celles-ci étant dues aux sauts de la fonction masque du solide lors du déplacement.

	LBM	Code_saturne
$\langle C_d \rangle$	2.26	2.26
$C_{l_{rms}}$	0.12	0.11
$C_{l_{max}}$	0.17	0.17

TABLE 4.12 – Comparaison des coefficients de portance et de trainée

FIGURE 4.28 – Comparaison du coefficient de portance C_L obtenu par – CFD et • LBM

Ces résultats permettent d'envisager l'étape suivante qui consiste à laisser les efforts fluides s'exercer sur le solide. Ce cas est traité dans la section suivante.

4.3.7 Cylindre en oscillation libre

Le calcul a été effectué à la suite du calcul précédent. Après avoir imposé 10 oscillations, les efforts fluides sont pris en compte dans l'équation 4.16. L'algorithme de couplage utilisé est le même que celui représenté sur la figure 3.7. Cet algorithme simple de couplage a été conservé car, ramené à des critères dimensionnels, sur l'exemple actuel, un $\tilde{\Delta}t = 1$ en lattice Boltzmann correspond à un $\Delta t = 8 \cdot 10^{-4}$ s. De plus, à chaque degré de raffinement le pas de temps est divisé par 2. Le calcul présenté ici ayant été effectué avec 2 degrés de raffinement, la structure est résolue avec un pas de temps divisé par 4.

On observe sur la figure 4.29 une bonne concordance des résultats entre les deux simulations. L'écoulement induit un amortissement des oscillations de la structure, ainsi qu'un changement de la fréquence d'oscillation. En effet, alors que la fréquence adimensionnée $f_0^* = 2\pi\omega_0^*$ du système masse-ressort vaut 0.095, le cylindre, sous l'effet des efforts fluides, oscille à une fréquence $f^* = 0.09$. Ces deux effets de l'écoulement sont retransmis à l'identique sur les deux méthodes de résolution. On peut observer un léger écart sur les déplacements minimums et maximums du cylindre. Cet écart est lié à celui existant sur les calculs des efforts (figure 4.28), et reste dans la

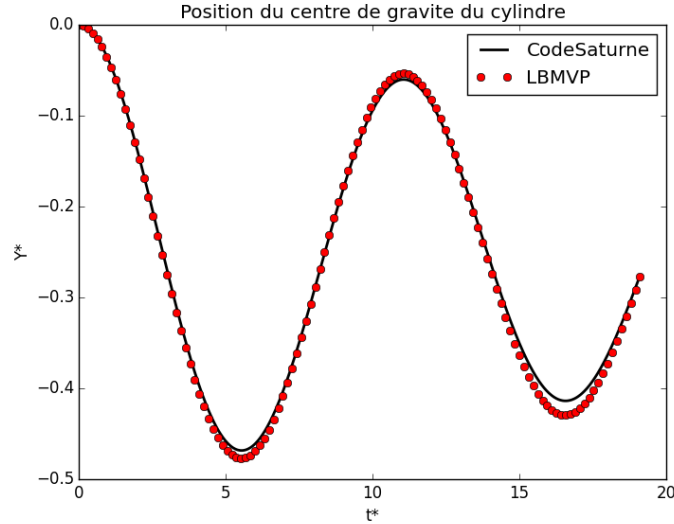


FIGURE 4.29 – Comparaison de la position du centre de gravité obtenu – CFD et • LBM

marge d'erreur pouvant exister lorsque que l'on compare deux codes de calculs numériques.

4.3.8 Écoulement entre deux plaques mobiles dans un canal

Dans cette partie, la méthode de la pénalisation volumique combinée avec la LBM est appliquée sur un écoulement 2D d'un fluide visqueux incompressible dans un canal de longueur $L = 200 (lu)$ et de largeur $H = 100 (lu)$. Un mouvement est imposé sur les parois supérieure et inférieure de telle manière à ce que les deux parois se déplacent avec une même vitesse constante u_w mais de sens opposé (voir figure 4.30). Pour calculer l'écoulement avec la méthode la pénalisation volumique, on considère que les parois horizontales du canal sont des solides en mouvement, ayant une épaisseur (e) identique. Pour juger de la justesse de nos calculs, nous avons fait varier cette épaisseur. Les conditions aux limites à l'entrée et sortie du canal sont de type périodiques. Le modèle à neuf vitesses discrètes $D2Q9$ est choisi pour nos simulations. Nous comparons nos résultats du modèle BGK et MRT, avec les résultats trouvés dans la littérature (Lu et al. (2012)[89], et Farnoush & Manzari (2014) [90]). Dans nos simulation on s'intéresse juste à la vitesse d'écoulement entre les deux plaques mobiles ($0 \leq y \leq H$).

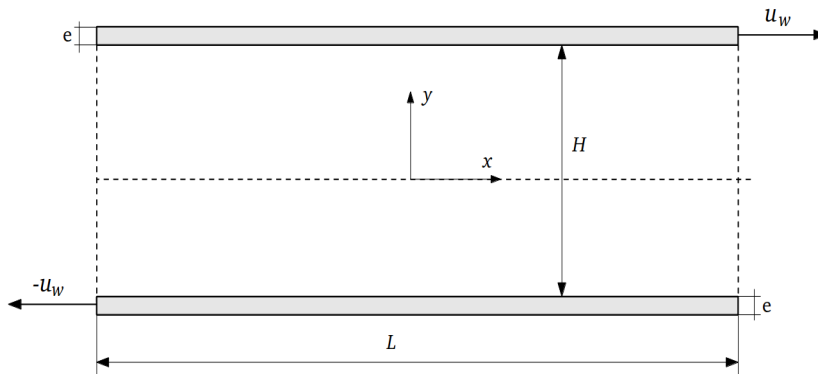


FIGURE 4.30 – Représentation du domaine d'étude.

4.3.8.1 Rappel sur le modèle MRT

Dans le modèle BGK les fonctions de distribution $f_\alpha(\mathbf{x}, t)$ ont toutes le même temps de relaxation, pour revenir à l'état d'équilibre. Mais dans la réalité, des phénomènes physiques différents peuvent retrouver l'équilibre en des temps de relaxation différents. En 1992, d'Humières [91] a présenté un nouveau modèle basé sur des temps de relaxation multiples (MRT, Multiple Relaxation Time), dans cette approche, les fonctions de distribution $f_\alpha(\mathbf{x}, t)$ sont associées à un ensemble de moments \mathbf{m}_α par l'intermédiaire d'une matrice orthogonale M . Les vitesses discrètes ξ_α du modèle MRT sont basées sur celles du BGK.

L'équation de lattice Boltzmann avec le modèle MRT est donnée par :

$$f_\alpha(\mathbf{x} + \xi_\alpha \Delta t, t + \Delta t) - f_\alpha(\mathbf{x}, t) = -M^{-1} \cdot S \cdot (\mathbf{m}_\alpha(\mathbf{x}, t) - \mathbf{m}_\alpha(\mathbf{x}, t)^{eq}) \quad (4.21)$$

Où S est la matrice de relaxation à l'équilibre qui contient les différents temps τ_α . $\mathbf{m}_\alpha(\mathbf{x}, t)$ et $\mathbf{m}_\alpha^{eq}(\mathbf{x}, t)$ sont le moment et le moment à l'équilibre :

$$\mathbf{m}_\alpha(\mathbf{x}, t) = (m_0, m_1, m_2, \dots, m_n)^T \quad (4.22)$$

Où n est le nombre de vitesses discrètes ξ_α . La matrice orthogonale M permet de relier les fonctions de distribution $f_\alpha(\mathbf{x}, t)$ avec leurs moments $\mathbf{m}_\alpha(\mathbf{x}, t)$ correspondants.

$$\mathbf{m}(\mathbf{x}, t) = M \cdot f(\mathbf{x}, t) \Rightarrow f(\mathbf{x}, t) = M^{-1} \cdot \mathbf{m}(\mathbf{x}, t) \quad (4.23)$$

Pour le modèle $D2Q9$, la matrice M est donnée par :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & -2 & -2 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

La matrice de relaxation S est calculée par :

$$S = \text{diag}(0, s_n, s_n, 0, s_q, 0, s_q, s_n, s_n) \quad (4.25)$$

Le moment à l'équilibre $\mathbf{m}_\alpha^{eq}(\mathbf{x}, t)$ est le suivant :

$$\mathbf{m}_\alpha^{eq}(\mathbf{x}, t) = \rho \left(1, -2 + 3(u^2 + v^2), 1 - 3(u^2 + v^2), u, -u, v, -v, (u^2 - v^2), uv \right)^T \quad (4.26)$$

Où u désigne la vitesse horizontale, et v la vitesse verticale.

Les deux modèles BGK et MRT, sont basés sur des opérateurs de collision différents. Malgré sa facilité de mise en œuvre, le modèle BGK souffre de certaines limitations en terme de stabilité. Par ailleurs, le schéma MRT est reconnu plus stable [56].

4.3.8.2 Discussion et validation des résultats

Les résultats de la pénalisation volumique sont comparés avec ceux issus des travaux de Lu et al. (2012) [89], qui ont utilisé la méthode des frontières immergées (Dirctet forcing) avec les deux schémas BGK et MRT (voir figure 4.31). En outre, nos résultats sont aussi comparés avec ceux de Farnoush & Manzari (2014) [90], qui ont fait les mêmes calculs que Lu et al, de plus, ils ont fait des calculs avec la méthode Immersed Moving Boundary développée par Noble & Torczynski (1998) [33] (voir figure 4.32).

Sur la figure 4.31, on s'intéresse juste à la vitesse d'écoulement entre les plaques mobiles ($0.25 \leq y \leq 0.75$). U^d désigne la vitesse des parois et $s_v = 1/\tau$. De la même manière sur la figure 4.32, on ne s'intéresse qu'à l'écoulement compris entre ($50lu \leq y \leq 150lu$).

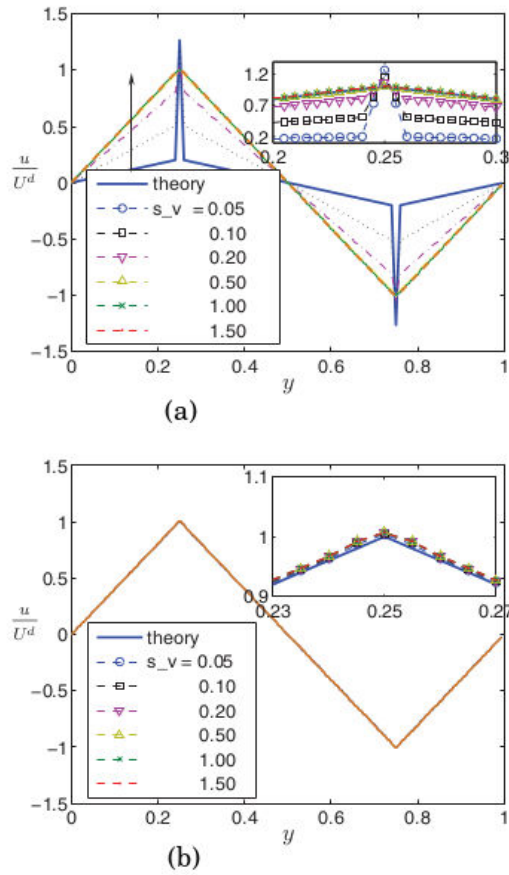


FIGURE 4.31 – Vitesse horizontale (u/u_w) pour l'écoulement de Couette à ($x = 100lu$) (a) (Lu et al) modèle BGK, (b) (Lu et al) modèle MRT.

On remarque sur les différents résultats obtenus que le fluide étudié est cisailé par les parois en mouvement, l'écoulement est donc généré par la force d'entraînement visqueuse agissant sur le fluide. On constate sur tous les cas étudiés, que la vitesse horizontale est nulle ($u = 0$) au milieu du canal, elle est négative sur la partie inférieure, en revanche, elle est positive sur la partie supérieure.

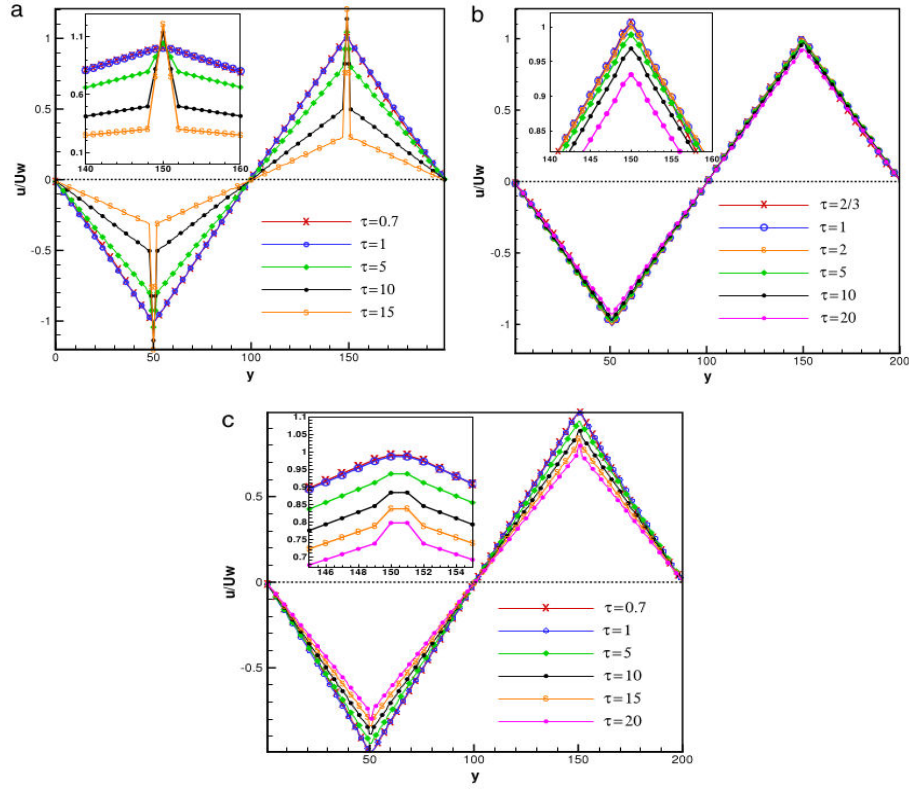
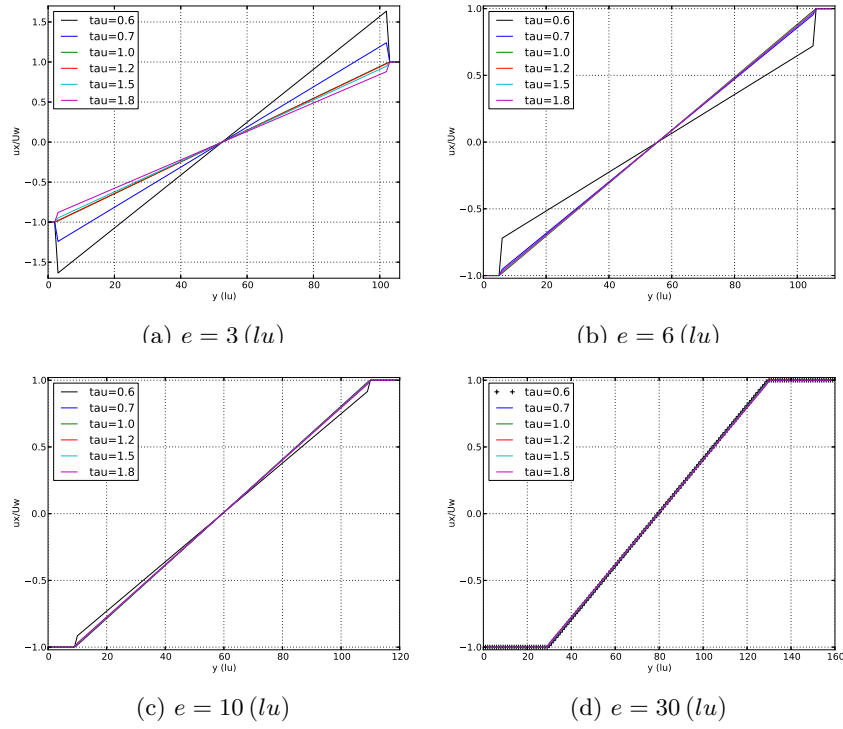
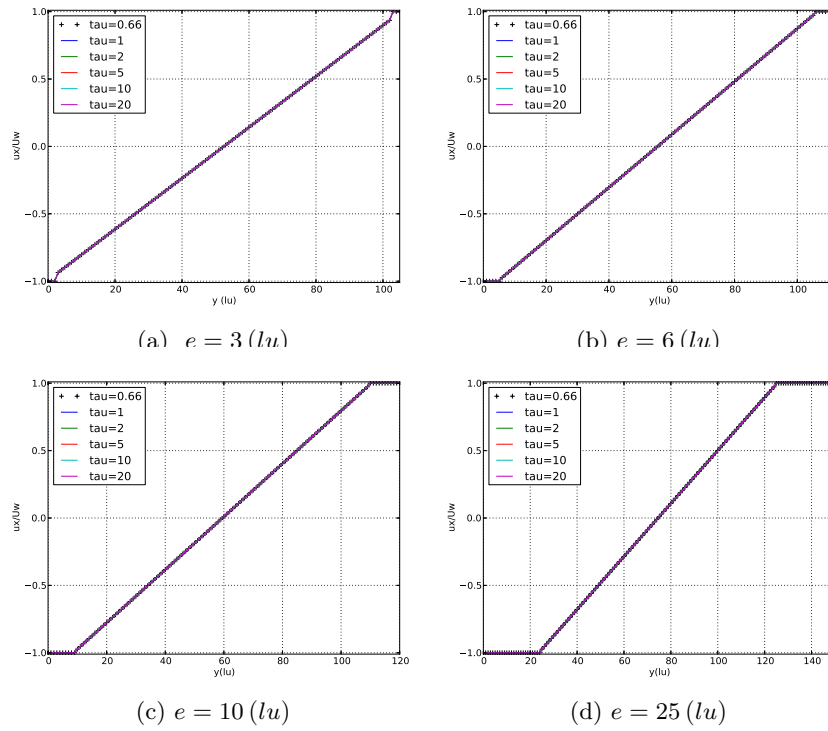


FIGURE 4.32 – Vitesse horizontale (u/u_w) pour l'écoulement de Couette à ($x = 0.5L$) **(a)** (Farnoush & Manzari) direct forcing avec modèle BGK, **(b)** (Farnoush & Manzari) direct forcing avec modèle MRT, **(c)** (Farnoush & Manzari) Immersed Moving Boundary.

La figure 4.33, montre l'influence de l'épaisseur (e), et du temps de relaxation (τ), sur la vitesse de l'écoulement dans le cas de la pénalisation volumique combinée avec la LBM-BGK. On constate qu'à chaque fois que l'épaisseur est grande, l'erreur diminue. Par ailleurs, on remarque qu'à partir d'une épaisseur $e = 30(lu)$, les résultats de la pénalisation sont de la même qualité que ceux de référence (voir figure 4.31.(b) et 4.32.(b)).

On montre sur la figure 4.34 les résultats de la pénalisation volumique combinée avec la LBM-MRT. Dans ce cas l'épaisseur (e) et (τ) n'ont pas beaucoup d'influence sur la vitesse horizontale de l'écoulement, contrairement au modèle BGK. Les résultats obtenus de la pénalisation sont meilleurs que ceux de référence (voir figure 4.31 et 4.32). En outre, on remarque aussi que les résultats de la MRT sont meilleurs que ceux issus du modèle BGK.

Les résultats présentés dans cette section, montrent encore une fois la fiabilité de la pénalisation volumique combiné avec la LBM, pour un écoulement dans un canal avec des parois mobiles.


 FIGURE 4.33 – Vitesse horizontale (u/u_w) à ($x = 0.5L$). Pénalisation LBM-BGK.

 FIGURE 4.34 – Vitesse horizontale (u/u_w) à ($x = 0.5L$). Pénalisation LBM-MRT.

4.4 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, la technique de la pénalisation volumique combinée avec la LBM, est validée sur les équations de Navier-Stokes.

Notre application est portée sur un écoulement autour de structures solides de formes différentes. Deux cas tests ont été étudiés, l'implémentation sur la structure solide carrée, montre clairement que la pénalisation est plus précise et fiable pour les maillages grossiers. On a obtenu de bons résultats sur tous les paramètres caractéristiques étudiés, en régime stationnaire et instationnaire. Par ailleurs, dans le cas de la structure circulaire, on a constaté des petits écarts dans les résultats par rapport à ceux issus de la littérature. On a vu que la grille cartésienne équidistante utilisée, peut être la source d'erreur. Le raffinement du maillage autour de la paroi solide est inéluctable, pour compenser une insuffisance de précision des calculs. Les résultats obtenus en régime stationnaire sont meilleurs qu'en régime instationnaire.

Jusqu'ici on a présenté l'essentiel de nos travaux, les résultats les plus marquants révèlent que la pénalisation volumique donne de bons résultats pour la longueur de recirculation derrière les structures étudiées, la même constatation est faite pour le coefficient de trainé, le coefficient de portance, ainsi que le nombre de Strouhal.

Notre étude d'interaction fluide structure a été portée tout d'abord sur un écoulement autour d'un obstacle circulaire mobile en oscillation forcée, puis en oscillation libre. Nos résultats ont été comparés avec ceux issus d'un code de CFD (Code Saturne). On a constaté une bonne concordance des champs de vitesse entre les deux simulations, les coefficients de trainée moyens, la moyenne quadratique du coefficient de portance ainsi que sa valeur maximale, sont assez proches. Les profils du coefficient de portance sont pratiquement superposés, et les oscillations de la structure sont quasiment identiques.

L'autre application a été portée sur un écoulement entre deux plaques mobiles dans un canal. On a observé sur les cas simulés, que les résultats de la pénalisation combinés avec la LBM sont en bon accord avec ceux de référence, pour les deux modèles étudiés (BGK et MRT).

Enfin, il convient de souligner que la pénalisation volumique combinée avec la LBM, donne de bons résultats pour tous les cas étudiés. Nous avons montré la capacité de la méthode à reproduire avec précision les résultats de référence.

Conclusions générales et perspectives

Ce travail met en valeur l'aptitude de l'outil numérique que nous venons de développer, à prédire des écoulements autour d'obstacles fixes ou en mouvement, avec la méthode de lattice Boltzmann et la pénalisation volumique. On a considéré dans toutes nos simulations, un fluide visqueux incompressible, et un solide rigide, non déformable, dont le mouvement est caractérisé par le terme de pénalisation volumique.

Nous avons rappelé les différentes méthodes (IBM, ALE, etc.) qui utilisent la LBM dans l'étude des écoulements autour de structures en mouvement. L'approche classique de type bounce back possède une limitation liée au fait qu'elle est précise uniquement lorsque la frontière fluide structure se trouve exactement au milieu entre deux nœuds fluides et solides. Quant au modèle proposé par Noble & Torczynski, celui-ci n'a été développé que pour un opérateur de collision BGK. Cela limite sa gamme d'utilisation. L'approche la plus utilisée dans la littérature, est la méthode des frontières immergées, qui est bien adaptée aux géométries complexes. Cependant, elle souffre de la sensibilité des résultats aux paramètres de la frontière pour le calcul de la force, et également l'obligation de résoudre 2 fois la LBM dans les approches de types Direct forcing. D'autre part, la méthode ALE, présente elle aussi des avantages en termes de précision et de stabilité, mais le remaillage lors des grandes déformations et déplacements de la structure engendre des coûts de calcul élevés.

L'approche que nous proposons ne possède pas ces inconvénients. Notre combinaison de la pénalisation volumique avec la LBM, a tout d'abord été testée pour résoudre l'équation de Burgers monodimensionnelle. Le terme de pénalisation a été traité d'une manière implicite dans l'équation de lattice Boltzmann. La validation s'est portée en premier lieu, sur un écoulement autour d'un solide fixe, où on a constaté que l'erreur relative sur les résultats du champ de vitesse, ne dépasse pas 0.80 %. De plus, les résultats relatifs au mouvement imposé sont en bon accord avec ceux de référence. En outre, l'application sur un problème d'IFS de type masse-ressort, a donné de bons résultats sur la position de l'interface.

La méthode développée a été ensuite validée pour les équations de Navier-Stokes incompressibles. On a d'abord étudié un écoulement autour de structures fixes (carré et cylindre) à plusieurs nombres de Reynolds. Les résultats de nos différentes simulations ont montré que la pénalisation volumique donne de bons résultats sur la longueur de recirculation, le coefficient de traînée, le coefficient de portance, et sur le nombre de Strouhal. De plus, en comparaison avec une approche de type bounce back, largement utilisée en LBM, la méthode de pénalisation volumique possède le même temps de convergence. Les résultats de notre application sur l'interaction fluide structure sont également prometteurs. Ceux-ci ont été validés par comparaison des résultats issus d'un code CFD et des données de la littérature.

Plusieurs perspectives de développement restent encore envisageables :

Une perspective dans un futur très proche est d'évaluer d'une façon plus approfondie la méthode de la pénalisation volumique combinée avec la LBM, pour résoudre des écoulements autour d'obstacles en mouvement, en comparant ses performances avec celles d'autres méthodes combinées avec la LBM, comme le bounce back, et la méthode des frontières immergées.

Un inconvénient de la méthode de lattice Boltzmann est que pour traiter des écoulements incompressibles, le nombre de Mach doit être très faible, ceci entraîne, si on utilise un modèle de collision BGK, des temps de calcul élevés, car on doit respecter des critères de stabilité assez sévères pour le temps de relaxation.

Pour passer à des cas plus réalistes (monter en nombre de Reynolds, modéliser des écoulements tridimensionnels), et traiter des cas plus proches de la réalité, il sera nécessaire de paralléliser le code de calcul. Les opérations que l'on fait avec la méthode de lattice Boltzmann sont locales, et on effectue des opérations simples (multiplications et additions). De plus, la technique de la pénalisation volumique pour calculer des écoulements autour d'obstacles en mouvement est aisée à mettre en œuvre, et la structure du programme que nous avons construit, même si nous considérons des raffinements de maillage, est assez simple. Ainsi, nous envisageons de paralléliser notre code et de l'implanter sur processus graphiques, afin de pouvoir réaliser des calculs rapides grâce à l'utilisation d'un très grand nombre de processeurs.

De plus, la plus grande partie des calculs ont été effectués avec le modèle BGK pour la prise en compte de l'opérateur de collision. Comme la méthode de pénalisation volumique est relativement simple à mettre en œuvre, nous l'avons, dans la dernière application présentée dans ce mémoire, adaptée sans trop de difficultés à une résolution avec la méthode de lattice Boltzmann et l'utilisation du schéma MRT (Multiple Relaxation Times) qui prend en compte le fait que les modes tendent vers un état d'équilibre en des temps de relaxation différents. Cette méthode est plus stable que celle basée sur le modèle BGK (un seul temps de relaxation pour tous les modes). Il sera intéressant d'évaluer la méthode de pénalisation volumique combinée avec la LBM d'une façon approfondie avec un schéma MRT pour l'opérateur de collision.

Par ailleurs, jusqu'à présent, nous nous sommes intéressés à des solides indéformables. Une autre perspective de ce travail sera d'évaluer la méthode de pénalisation volumique associée à la LBM, pour modéliser des écoulements autour d'obstacles déformables.

ANNEXES

ANNEXE A

Développement de Chapman-Enskog appliqué à l'équation de lattice Boltzmann pour la résolution d'une équation de convection-diffusion non linéaire

Dans cette annexe on va appliquer le développement de Chapman-Enskog pour la détermination du paramètre λ , utilisé dans le terme force du modèle de Shi et Guo (2009) [72] décrit dans la section (3.2). En effet, pour appliquer la pénalisation volumique, nous avons dû traiter le terme force F_α utilisé pour modéliser le terme de pénalisation volumique, de façon implicite.

Tout d'abord, nous obtenons l'équation de lattice Boltzmann, avec le terme force écrit de façon implicite. Pour cela, nous partons de l'équation de Boltzmann discrète :

$$\frac{df_\alpha}{dt} = \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \boldsymbol{\xi}_\alpha \cdot \nabla f_\alpha = -\frac{1}{\tau}(f_\alpha - f_\alpha^{eq}) + F_\alpha \quad (4.27)$$

Cette équation peut se mettre sous la forme [11] :

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} f_\alpha(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}_\alpha s, t + s) &= -\frac{1}{\tau} [f_\alpha(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}_\alpha s, t + s) - f_\alpha^{eq}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}_\alpha s, t + s)] \\ &+ F_\alpha(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}_\alpha s, t + s) \end{aligned} \quad (4.28)$$

où on a écrit l'équation 4.27 le long de la caractéristique $(\mathbf{x}', t') = (\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}_\alpha s, t + s)$ paramétrée par s . On pose l'opérateur de collision :

$$\Omega_\alpha(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{\tau}(f_\alpha(\mathbf{x}, t) - f_\alpha^{eq}(\mathbf{x}, t)) \quad (4.29)$$

L'intégration de l'équation (4.28), entre $s = 0$ et $s = \Delta t$ donne :

$$f_\alpha(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}_\alpha \Delta t, t + \Delta t) - f_\alpha(\mathbf{x}, t) = \int_0^{\Delta t} \Omega_\alpha(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}_\alpha s, t + s) ds + \int_0^{\Delta t} F_\alpha(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}_\alpha s, t + s) ds \quad (4.30)$$

Si on choisit un schéma explicite pour l'approximation de l'intégration temporelle de l'opérateur de collision, et un schéma implicite pour le terme force, on obtient donc :

$$f_\alpha(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}_\alpha \Delta t, t + \Delta t) - f_\alpha(\mathbf{x}, t) \simeq -\frac{\Delta t}{\tau} [f_\alpha(\mathbf{x}, t) - f_\alpha^{eq}(\mathbf{x}, t)] + \Delta t F_\alpha(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}_\alpha \Delta t, t + \Delta t) \quad (4.31)$$

Nous partons donc de cette équation, avec le terme force exprimé de la façon suivante [72] :

$$F_\alpha(\mathbf{x}, t) = \omega_\alpha F(\mathbf{x}, t) \left[1 + \lambda \frac{\boldsymbol{\xi}_\alpha \cdot \mathbf{B}'(\phi)}{c_s^2} \right] \quad (4.32)$$

où $(\mathbf{B}' = d\mathbf{B}/d\phi)$ et (λ) est un paramètre à déterminer.

Si on applique un développement de Taylor à l'équation 4.31, on obtient :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \xi_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \right) f_\alpha(\mathbf{x}, t) + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \xi_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \right)^2 f_\alpha(\mathbf{x}, t) + \dots = -\frac{1}{\tau \Delta t} (f_\alpha(\mathbf{x}, t) \\ - f_\alpha^{eq}(\mathbf{x}, t)) + F_\alpha(\mathbf{x}, t) + \Delta t \left(\frac{\partial}{\partial t} + \xi_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \right) F_\alpha(\mathbf{x}, t) + \dots \end{aligned} \quad (4.33)$$

Nous allons introduire dans l'équation 4.33 l'expansion de Chapman-Enskog en temps et en espace :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial}{\partial t_1} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_2} \\ \frac{\partial}{\partial x} = \epsilon \frac{\partial}{\partial x_1} \\ f_\alpha(\mathbf{x}, t) = f_\alpha^{eq}(\mathbf{x}, t) + \epsilon f_\alpha^{(1)}(\mathbf{x}, t) + \epsilon^2 f_\alpha^{(2)}(\mathbf{x}, t) \\ F_\alpha(\mathbf{x}, t) = \epsilon F_\alpha^{(1)}(\mathbf{x}, t) \end{cases} \quad (4.34)$$

(ϵ) peut être considéré comme le nombre de Knudsen.

Avec l'expansion de Chapman-Enskog, on obtient :

$$\begin{aligned} \left[\epsilon \left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \xi_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_{1\beta}} \right) + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_2} \right] \left(f_\alpha^{eq}(\mathbf{x}, t) + \epsilon f_\alpha^{(1)}(\mathbf{x}, t) + \epsilon^2 f_\alpha^{(2)}(\mathbf{x}, t) \right) + \frac{\Delta t}{2} \left[\epsilon \left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \right. \right. \\ \left. \left. \xi_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_{1\beta}} \right) + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_2} \right]^2 \left(f_\alpha^{eq}(\mathbf{x}, t) + \epsilon f_\alpha^{(1)}(\mathbf{x}, t) + \epsilon^2 f_\alpha^{(2)}(\mathbf{x}, t) \right) = -\frac{1}{\tau \Delta t} \left(\epsilon f_\alpha^{(1)}(\mathbf{x}, t) + \right. \\ \left. \epsilon^2 f_\alpha^{(2)}(\mathbf{x}, t) \right) + \epsilon F_\alpha^{(1)}(\mathbf{x}, t) + \Delta t \left[\epsilon \left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \xi_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_{1\beta}} \right) + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_2} \right] \epsilon F_\alpha^{(1)}(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (4.35)$$

En mettant à part les termes de l'équation (4.35), de l'ordre ϵ et ϵ^2 , on déduit :

en $o(\epsilon)$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \xi_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_{1\beta}} \right) f_{\alpha}^{eq}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{\tau\Delta t} f_{\alpha}^{(1)}(\mathbf{x}, t) + F_{\alpha}^{(1)}(\mathbf{x}, t) \quad (4.36)$$

en $o(\epsilon^2)$:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \xi_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_{1\beta}} \right) f_{\alpha}^{(1)}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial}{\partial t_2} f_{\alpha}^{eq}(\mathbf{x}, t) + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \xi_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_{1\beta}} \right)^2 f_{\alpha}^{eq}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{\tau\Delta t} \\ & f_{\alpha}^{(2)}(\mathbf{x}, t) + \Delta t \left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \xi_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_{1\beta}} \right) F_{\alpha}^{(1)}(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (4.37)$$

En introduisant l'équation (4.36) dans l'équation (4.37), on a :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t_2} f_{\alpha}^{eq}(\mathbf{x}, t) + \left(1 - \frac{1}{2\tau} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \xi_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_{1\beta}} \right) f_{\alpha}^{(1)}(\mathbf{x}, t) - \frac{\Delta t}{2} \xi_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_{1\beta}} F_{\alpha}^{(1)}(\mathbf{x}, t) = \\ & -\frac{1}{\tau\Delta t} f_{\alpha}^{(2)}(\mathbf{x}, t) + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial t_1} F_{\alpha}^{(1)}(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (4.38)$$

Sachant que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\alpha} f_{\alpha}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\alpha} f_{\alpha}^{eq}(\mathbf{x}, t) = \phi \\ \sum_{\alpha} \xi_{\alpha} f_{\alpha}^{eq}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}(\phi) \\ \sum_{\alpha} f_{\alpha}^{(k)}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (k \geq 1) \\ \sum_{\alpha} F_{\alpha}^{(1)}(\mathbf{x}, t) = F^{(1)}(\mathbf{x}, t) \\ \sum_{\alpha} \xi_{\alpha} F_{\alpha}^{(1)}(\mathbf{x}, t) = \left(\lambda F^{(1)}(\mathbf{x}, t) \mathbf{B}'(\phi) \right) \end{array} \right. \quad (4.39)$$

En calculant \sum_{α} (équation 4.36) :

$$\frac{\partial}{\partial t_1} \phi + \frac{\partial}{\partial x_{1\beta}} B_{\beta} = F^{(1)}(\mathbf{x}, t) \quad (4.40)$$

De la même manière, en calculant \sum_{α} (équation 4.37), on a :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \phi}{\partial t_2} + \left(1 - \frac{1}{2\tau} \right) + \frac{\partial}{\partial x_{1\beta}} \sum_{\alpha} \left(\xi_{\alpha\beta} f_{\alpha}^{(1)}(\mathbf{x}, t) \right) - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x_{1\beta}} \left(\lambda F^{(1)}(\mathbf{x}, t) B'(\phi)_{\beta} \right) \\ & = \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial t_1} F^{(1)}(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (4.41)$$

Dans l'équation 4.41, il y a le terme $\sum_{\alpha} \left(\xi_{\alpha\beta} f_{\alpha}^{(1)}(\mathbf{x}, t) \right)$ que l'on ne connaît pas. Pour le déterminer, on fait l'opération $\sum_{\alpha} \xi_{\alpha\gamma}$ (équation 4.36), ce qui donne :

$$\sum_{\alpha} \xi_{\alpha\gamma} f_{\alpha}^{(1)}(\mathbf{x}, t) = -\tau \Delta t \left[\frac{\partial}{\partial t_1} B(\phi)_{\gamma} + \frac{\partial}{\partial x_{1\beta}} \sum_{\alpha} C_{\alpha\gamma} C_{\alpha\beta} f_{\alpha}^{eq} - \lambda F^{(1)}(\mathbf{x}, t) B'(\phi)_{\gamma} \right] \quad (4.42)$$

soit :

$$\sum_{\alpha} \xi_{\alpha\gamma} f_{\alpha}^{(1)}(\mathbf{x}, t) = -\tau \Delta t \left[\frac{\partial}{\partial t_1} B(\phi)_{\gamma} + \frac{\partial}{\partial x_{1\beta}} C(\phi)_{\gamma\beta} - \lambda F^{(1)}(\mathbf{x}, t) B'(\phi)_{\gamma} \right] \quad (4.43)$$

On utilise :

$$\frac{\partial B_{\gamma}}{\partial t_1} = B'(\phi)_{\gamma} \frac{\partial \phi}{\partial t_1} \quad (4.44)$$

et comme :

$$C(\phi) = C_0(\phi) + c_s^2 D(\phi) I \quad (4.45)$$

on en déduit :

$$\frac{\partial}{\partial x_{1\beta}} (C(\phi)_{\gamma\beta}) = C'_0(\phi)_{\gamma\beta} + c_s^2 \frac{\partial}{\partial x_{1\gamma}} (D(\phi)) \quad (4.46)$$

Avec 4.44 et 4.46, on obtient pour le terme inconnu :

$$\sum_{\alpha} \xi_{\alpha\gamma} f_{\alpha}^{(1)}(\mathbf{x}, t) = -\tau \Delta t \left[B'(\phi)_{\gamma} \frac{\partial \phi}{\partial t_1} + C'_0(\phi)_{\gamma\beta} \frac{\partial \phi}{\partial x_{1\beta}} + c_s^2 \frac{\partial}{\partial x_{1\gamma}} D(\phi) - \lambda F^{(1)}(\mathbf{x}, t) B'(\phi)_{\gamma} \right] \quad (4.47)$$

et, en posant au préalable :

$$C'_0(\phi)_{\gamma\beta} = B'(\phi)_{\gamma} B'(\phi)_{\beta} \quad (4.48)$$

on obtient :

$$\sum_{\alpha} \xi_{\alpha\gamma} f_{\alpha}^{(1)}(\mathbf{x}, t) = -\tau \Delta t \left(c_s^2 \frac{\partial}{\partial x_{1\gamma}} D(\phi) + (1 - \lambda) F^{(1)}(\mathbf{x}, t) B'(\phi)_{\gamma} \right) \quad (4.49)$$

On remplace cette expression dans l'équation 4.41, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t_2} = \frac{\partial}{\partial x_{1\beta}} \left[\tau \Delta t \left(1 - \frac{1}{2\tau} \right) c_s^2 \frac{\partial}{\partial x_{1\beta}} D(\phi) \right] - \Delta t \frac{\partial}{\partial x_{1\beta}} \left[\lambda (\tau - 1) - \left(\tau - \frac{1}{2} \right) \right] \\ F^{(1)}(\mathbf{x}, t) B'(\phi)_{\beta} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial t_1} F^{(1)}(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (4.50)$$

On multiplie l'équation (4.40) par (ϵ) , et l'équation (4.50) par (ϵ^2) et on somme les deux

équations obtenues :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\beta}(B_\beta) &= F(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left[\tau \Delta t \left(1 - \frac{1}{2\tau} \right) c_s^2 \frac{\partial}{\partial x_\beta} D(\phi) \right] - \Delta t \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left[\lambda(\tau - 1) \right. \\ &\quad \left. - \left(\tau - \frac{1}{2} \right) F(\mathbf{x}, t) B'(\phi)_\beta \right] + \epsilon \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial t_1} F(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (4.51)$$

Par identification avec l'équation (4.52) suivante :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\beta}(B_\beta) = F(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(\alpha \frac{\partial}{\partial x_\beta} D(\phi) \right) \quad (4.52)$$

On peut déduire donc que le coefficient de diffusion vaut :

$$\alpha = \tau \Delta t \left(1 - \frac{1}{2\tau} \right) c_s^2 \quad (4.53)$$

et que le coefficient λ vaut :

$$\lambda = \frac{\left(\tau - \frac{1}{2} \right)}{(\tau - 1)} \quad (4.54)$$

ANNEXE B

Obtention du système à résoudre à chaque pas de temps pour l'équation de Burgers monodimensionnelle, résolue avec la méthode de lattice Boltzmann

Dans cette annexe, nous expliquons comment nous avons obtenu un système à résoudre, de 3 équations à 3 inconnues (avec un modèle *D1Q3*), pour la résolution de l'équation de Burgers monodimensionnelle, avec la méthode de lattice Boltzmann, et un terme de pénalisation écrit avec un schéma implicite.

Rappelons l'équation de lattice Boltzmann, où l'approximation de l'intégration temporelle du terme force a été faite avec un schéma implicite :

$$f_\alpha(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}_\alpha \Delta t, t + \Delta t) - f_\alpha(\mathbf{x}, t) = -\frac{\Delta t}{\tau} [f_\alpha(\mathbf{x}, t) - f_\alpha^{eq}(\mathbf{x}, t)] + \Delta t F_\alpha(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}_\alpha \Delta t, t + \Delta t) \quad (4.55)$$

avec le terme force exprimé de la façon suivante [72] :

$$F_\alpha(\mathbf{x}, t) = \omega_\alpha F(\mathbf{x}, t) \left[1 + \lambda \frac{\boldsymbol{\xi}_\alpha \cdot \mathbf{B}'(\phi)}{c_s^2} \right] \quad (4.56)$$

où $(\mathbf{B}' = d\mathbf{B}/d\phi)$. Pour l'équation de Burgers monodimensionnelle pénalisée, on a $B'(\phi) = u$ et $F = -\frac{1}{\eta} \chi_i (u - u_s)$.

On effectue un changement de variable en espace, où on se décale de $(-\boldsymbol{\xi}_\alpha \Delta t)$. L'équation (4.55) devient :

$$\begin{aligned} f_\alpha(\mathbf{x}, t + \Delta t) - f_\alpha(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_\alpha \Delta t, t) &= -\frac{\Delta t}{\tau} [f_\alpha(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_\alpha \Delta t, t) - f_\alpha^{eq}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_\alpha \Delta t, t)] \\ &+ \Delta t F_\alpha(\mathbf{x}, t + \Delta t) \end{aligned} \quad (4.57)$$

Avec ce changement de variable, on voit qu'il n'y aura plus d'étape de propagation dans l'algorithme de la LBM.

On remplace le terme force (F_α) qui comporte le paramètre de pénalisation (correspondant à l'équation de Burgers 3.10) :

$$\begin{aligned} f_\alpha(\mathbf{x}, t + \Delta t) - \Delta t \omega_\alpha \left(1 + \lambda \frac{\boldsymbol{\xi}_\alpha \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t + \Delta t)}{c_s^2} \right) \frac{\chi_i}{\eta} (\mathbf{u}(\mathbf{x}, t + \Delta t) - \mathbf{u}_s(\mathbf{x}, t + \Delta t)) \\ = f_\alpha(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_\alpha \Delta t, t) - \frac{\Delta t}{\tau} [f_\alpha(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_\alpha \Delta t, t) - f_\alpha^{eq}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_\alpha \Delta t, t)] \end{aligned} \quad (4.58)$$

On obtient un système non linéaire en terme de vitesse, qu'on résout en choisissant de linéariser par rapport au pas de temps précédent, ce qui donne :

$$\begin{aligned} f_\alpha(\mathbf{x}, t + \Delta t) - \Delta t \omega_\alpha \left(1 + \lambda \frac{\boldsymbol{\xi}_\alpha \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{c_s^2} \right) \frac{\chi_i}{\eta} (\mathbf{u}(\mathbf{x}, t + \Delta t) - \mathbf{u}_s(\mathbf{x}, t + \Delta t)) \\ = f_\alpha(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_\alpha \Delta t, t) - \frac{\Delta t}{\tau} [f_\alpha(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_\alpha \Delta t, t) - f_\alpha^{eq}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_\alpha \Delta t, t)] \end{aligned} \quad (4.59)$$

On pose :

$$A_\alpha = \Delta t \omega_\alpha \left(1 + \lambda \frac{\boldsymbol{\xi}_\alpha \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{c_s^2} \right) \quad (4.60)$$

$$\begin{aligned} f_\alpha(\mathbf{x}, t + \Delta t) - A_\alpha \frac{\chi_i}{\eta} (\mathbf{u}(\mathbf{x}, t + \Delta t) - \mathbf{u}_s(\mathbf{x}, t + \Delta t)) = f_\alpha(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_\alpha \Delta t, t) \\ - \frac{\Delta t}{\tau} [f_\alpha(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_\alpha \Delta t, t) - f_\alpha^{eq}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_\alpha \Delta t, t)] \end{aligned} \quad (4.61)$$

Pour nos simulations on a choisi le modèle à une seule dimension et à trois vitesses discrètes (D1Q3) :

$$u(\mathbf{x}, t + \Delta t) = f_0(\mathbf{x}, t + \Delta t) + f_1(\mathbf{x}, t + \Delta t) + f_2(\mathbf{x}, t + \Delta t) \quad (4.62)$$

On remplace dans l'équation (4.61) :

$$\begin{aligned} f_\alpha(\mathbf{x}, t + \Delta t) - A_\alpha \frac{\chi_i}{\eta} [f_0(\mathbf{x}, t + \Delta t) + f_1(\mathbf{x}, t + \Delta t) + f_2(\mathbf{x}, t + \Delta t) - \mathbf{u}_s(\mathbf{x}, t + \Delta t)] \\ = f_\alpha(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_\alpha \Delta t, t) - \frac{\Delta t}{\tau} [f_\alpha(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_\alpha \Delta t, t) - f_\alpha^{eq}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_\alpha \Delta t, t)] \end{aligned} \quad (4.63)$$

En écrivant l'équation 4.63 pour $\alpha = 0$, $\alpha = 1$, $\alpha = 2$, on obtient un système linéaire de 3 équations à 3 inconnues ($f_0(\mathbf{x}, t + \Delta t)$, $f_1(\mathbf{x}, t + \Delta t)$, $f_2(\mathbf{x}, t + \Delta t)$) qu'on résout à chaque pas de temps.

ANNEXE C

De lattice Boltzmann à Navier-Stokes : le développement de Chapman-Enskog

On démontre dans cette annexe comment on passe des grandeurs mésoscopiques (LBM), aux grandeurs macroscopiques (NS), en utilisant la procédure de Chapman-Enskog [92].

L'équation de lattice Boltzmann avec l'approximation BGK (Bhatnagar-Gross-Krook) est donnée par :

$$f_\alpha(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}_\alpha \Delta t, t + \Delta t) - f_\alpha(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{\tau} (f_\alpha(\mathbf{x}, t) - f_\alpha(\mathbf{x}, t)^{eq}) = \Omega_\alpha(\mathbf{x}, t) \quad (4.64)$$

En utilisant le développement en série de Taylor, on a :

$$f_\alpha(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}_\alpha \Delta t, t + \Delta t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta t^n}{n!} D_t^n f_\alpha(\mathbf{x}, t) \quad (4.65)$$

Avec :

$$D_t = \partial_t + \boldsymbol{\xi}_\alpha \cdot \nabla$$

De l'équation (4.65), on peut écrire :

$$\begin{aligned} \Omega_\alpha(\mathbf{x}, t) &= f_\alpha(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}_\alpha \Delta t, t + \Delta t) - f_\alpha(\mathbf{x}, t) \\ &= \Delta t (\partial_t + \boldsymbol{\xi}_\alpha \cdot \nabla) f_\alpha + \frac{\Delta t^2}{2} (\partial_t^2 + 2\partial_t \nabla \cdot \boldsymbol{\xi}_\alpha + \nabla \nabla : \boldsymbol{\xi}_\alpha \boldsymbol{\xi}_\alpha) f_\alpha + O(\Delta t^3) \end{aligned} \quad (4.66)$$

On sépare le temps en deux échelles t_1 et t_2 tel que $f_\alpha(\vec{x}, t) \rightarrow f_\alpha(\vec{x}, t_1, t_2)$. L'échelle t_1 correspond aux phénomènes rapides comme l'advection, cependant l'échelle t_2 correspond aux phénomènes lents comme la diffusion.

Les dérivés spatiales et temporelles sont approximées de la manière suivante :

$$\begin{cases} \partial_t = \epsilon \partial_{t_1} + \epsilon^2 \partial_{t_2} + O(\epsilon^3) \\ \nabla = \epsilon \nabla_1 + \epsilon^2 \nabla_2 + O(\epsilon^3) \end{cases} \quad (4.67)$$

Où le paramètre ϵ caractérise la séparation des échelles, il pourra être assimilé au nombre de Knudsen Kn .

L'approximation ou la perturbation de la fonction de distribution autour de l'équilibre donne :

$$f_\alpha(\mathbf{x}, t) = f_\alpha^{(0)} + \epsilon^1 f_\alpha^{(1)} + \epsilon^2 f_\alpha^{(2)} + O(\epsilon^3) \quad (4.68)$$

L'expansion de l'opérateur de collision $\Omega_\alpha(\mathbf{x}, t)$ est donnée par :

$$\Omega_\alpha(\mathbf{x}, t) = \Omega_\alpha^{(0)} + \epsilon^1 \Omega_\alpha^{(1)} + \epsilon^2 \Omega_\alpha^{(2)} + O(\epsilon^3) \quad (4.69)$$

On peut déduire de l'équation (4.66) que $\Omega_\alpha^{(0)} = 0$.

L'opérateur de collision $\Omega_\alpha(\mathbf{x}, t)$ doit répondre aux critères de conservation de la masse et du mouvement :

$$\sum_\alpha \Omega_\alpha(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (4.70)$$

En absence du terme force on peut écrire :

$$\sum_\alpha \boldsymbol{\xi}_\alpha \Omega_\alpha(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (4.71)$$

En injectant les équations (4.67), (4.68), et (4.69) dans l'équation (4.66), on obtient :

$$\begin{aligned} \Omega_\alpha^{(0)} + \epsilon \Omega_\alpha^{(1)} + \epsilon^2 \Omega_\alpha^{(2)} + O(\epsilon^3) &= \left(\epsilon(\partial_{t_1} + \nabla_1 \cdot \boldsymbol{\xi}_\alpha) + \epsilon^2(\partial_{t_2} + \nabla_2 \cdot \boldsymbol{\xi}_\alpha) + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2} \epsilon^2 (\partial_{t_1}^2 + 2\partial_{t_1} \nabla_1 \cdot \boldsymbol{\xi}_\alpha + \nabla_1 \nabla_1 : \boldsymbol{\xi}_\alpha \boldsymbol{\xi}_\alpha) + O(\epsilon^3) \right) \\ &\quad \left(f_\alpha^{(0)} + \epsilon f_\alpha^{(1)} + \epsilon^2 f_\alpha^{(2)} + O(\epsilon^3) \right) \end{aligned} \quad (4.72)$$

On sépare les termes en ordre (ϵ) et (ϵ^2) :

$$\Omega_\alpha^{(1)} = (\partial_{t_1} + \nabla_1 \cdot \boldsymbol{\xi}_\alpha) f_\alpha^{(0)} \quad (4.73)$$

$$\begin{aligned} \Omega_\alpha^{(2)} &= (\partial_{t_1} + \nabla_1 \cdot \boldsymbol{\xi}_\alpha) f_\alpha^{(1)} + (\partial_{t_2} + \nabla_2 \cdot \boldsymbol{\xi}_\alpha) f_\alpha^{(0)} \\ &\quad + \frac{1}{2} (\partial_{t_1}^2 + 2\partial_{t_1} \nabla_1 \cdot \boldsymbol{\xi}_\alpha + \nabla_1 \nabla_1 : \boldsymbol{\xi}_\alpha \boldsymbol{\xi}_\alpha) f_\alpha^{(0)} \end{aligned} \quad (4.74)$$

On définit les moments suivants :

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \sum_{\alpha} f_{\alpha}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\alpha} f_{\alpha}^{(0)}(\mathbf{x}, t) \quad (4.75)$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\alpha} \xi_{\alpha} f_{\alpha}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\alpha} \xi_{\alpha} f_{\alpha}^{(0)}(\mathbf{x}, t)$$

Avec :

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}^{(0)} + \epsilon \mathbf{j}^{(1)} + O(\epsilon^2) \quad (4.76)$$

Nous définissons le moment du deuxième ordre $\mathbf{\Pi}$ en termes de vitesse discrète ξ :

$$\mathbf{\Pi} = \sum_{\alpha} Q_{\alpha} f_{\alpha}(\mathbf{x}, t) \quad (4.77)$$

Avec :

$$Q_{\alpha} = \xi_{\alpha} \xi_{\alpha} - c_s^2 I \quad (4.78)$$

En remplaçant les équations (4.69), (4.73) dans (4.70), on obtient :

Termes d'ordre (ϵ) :

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} \Omega_{\alpha}^{(1)} &= \sum_{\alpha} (\partial_{t_1} + \nabla_1 \cdot \xi_{\alpha}) f_{\alpha}^{(0)} \\ &= \partial_{t_1} \rho + \nabla_1 \cdot \mathbf{j}^{(0)} = 0 \end{aligned} \quad (4.79)$$

Termes d'ordre (ϵ^2) :

On injecte les équations (4.69), (4.74) dans (4.70), on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} \Omega_{\alpha}^{(2)} &= \sum_{\alpha} \left((\partial_{t_1} + \nabla_1 \cdot \xi_{\alpha}) f_{\alpha}^{(1)} + (\partial_{t_2} + \nabla_2 \cdot \xi_{\alpha}) f_{\alpha}^{(0)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (\partial_{t_1}^2 + 2\partial_{t_1} \nabla_1 \cdot \xi_{\alpha} + \nabla_1 \nabla_1 : \xi_{\alpha} \xi_{\alpha}) f_{\alpha}^{(0)} \right) \\ &= \nabla_1 \cdot \mathbf{j}^{(1)} + \partial_{t_2} \rho + \nabla_2 \cdot \mathbf{j}^{(0)} + \frac{1}{2} \partial_{t_1} \nabla_1 \cdot \mathbf{j}^{(0)} + \frac{1}{2} \nabla_1 \nabla_1 : \mathbf{\Pi}^{(0)} + \frac{1}{2} c_s^2 \nabla_1^2 \rho = 0 \end{aligned} \quad (4.80)$$

On remplace les équations ((4.69) $\times \xi_{\alpha}$) et (4.73) dans (4.71), on obtient :

Termes d'ordre (ϵ) :

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} \xi_{\alpha} \Omega_{\alpha}^{(1)} &= \sum_{\alpha} \xi_{\alpha} (\partial_{t_1} + \nabla_1 \cdot \xi_{\alpha}) f_{\alpha}^{(0)} \\ &= \partial_{t_1} \mathbf{j}^{(0)} + \nabla_1 \cdot \mathbf{\Pi}^{(0)} + c_s^2 \nabla_1 \rho = 0 \end{aligned} \quad (4.81)$$

L'équation ((4.81) $\times \nabla_1$) :

$$\partial_{t_1} \nabla_1 \cdot \mathbf{j}^{(0)} = -\nabla_1 \nabla_1 : \mathbf{\Pi}^{(0)} - c_s^2 \nabla_1^2 \rho \quad (4.82)$$

L'équation ((4.81) $\times \partial_{t_1}$) :

$$\partial_{t_1}^2 \mathbf{j}^{(0)} = -\partial_{t_1} \nabla_1 : \mathbf{\Pi}^{(0)} - c_s^2 \partial_{t_1} \nabla_1 \rho \quad (4.83)$$

On remplace les équations (4.75) et (4.82) dans (4.80), on obtient :

$$\partial_{t_2} \rho + \nabla_2 \cdot \mathbf{j}^{(0)} = 0 \quad (4.84)$$

L'addition des équations (4.79) et (4.84), permet d'avoir l'équation de la continuité (conservation de la masse) suivante :

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (4.85)$$

Termes d'ordre ($\epsilon^{(2)}$) :

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} \xi_{\alpha} \Omega_{\alpha}^{(2)} &= \sum_{\alpha} \left(\xi_{\alpha} (\partial_{t_1} + \nabla_1 \cdot \xi_{\alpha}) f_{\alpha}^{(1)} + \xi_{\alpha} (\partial_{t_2} + \nabla_2 \cdot \xi_{\alpha}) f_{\alpha}^{(0)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \xi_{\alpha} (\partial_{t_1}^2 + 2\partial_{t_1} \nabla_1 \cdot \xi_{\alpha} + \nabla_1 \nabla_1 : \xi_{\alpha} \xi_{\alpha}) f_{\alpha}^{(0)} \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.86)$$

On introduit le moment du troisième ordre \mathbf{R} en termes de vitesse ξ :

$$\mathbf{R} = \sum_{\alpha} \xi_{\alpha} \xi_{\alpha} \xi_{\alpha} f_{\alpha}(\mathbf{x}, t) \quad (4.87)$$

On remplace les équations (4.75) et (4.83) dans (4.86) on obtient :

$$\nabla_1 \cdot \mathbf{\Pi}^{(1)} + \partial_{t_2} j^{(0)} + \nabla_2 \cdot \mathbf{\Pi}^{(0)} + c_s^2 \nabla_2^2 \rho + \frac{1}{2} (\partial_{t_1} \nabla_1 \cdot \mathbf{\Pi}^{(0)} + \nabla_1 \nabla_1 : \mathbf{R}^{(0)} + c_s^2 \partial_{t_1} \nabla_1 \rho) = 0 \quad (4.88)$$

L'addition des équations ($\epsilon \times$ (4.81)) et ($\epsilon^2 \times$ (4.88)) donne :

$$\partial_t \mathbf{j}^{(0)} + \epsilon \nabla \cdot \left(\mathbf{\Pi}^{(0)} + \epsilon \mathbf{\Pi}^{(1)} + c_s^2 \rho \mathbf{I} + \frac{\epsilon}{2} \left((\partial_{t_1} \mathbf{\Pi}^{(0)} + c_s^2 \rho \mathbf{I}) + \nabla_1 \cdot \mathbf{R}^{(0)} \right) \right) = 0 \quad (4.89)$$

On constate de l'équation (4.89) que pour la dérivé spatiale ∇ , il n'est pas nécessaire d'aller jusqu'à l'ordre 2 en nombre de Knudsen car tous les termes en ∇_2 disparaissent.

On cherche ensuite les termes $\mathbf{j}^{(0)}$, $\mathbf{\Pi}^{(0)}$, $\mathbf{\Pi}^{(1)}$ et $\mathbf{R}^{(0)}$:

Le modèle BGK doit satisfaire les conditions de symétrie suivantes :

$$\begin{aligned}
(a) \sum_{\alpha} \omega_{\alpha} &= 1, & (b) \sum_{\alpha} \boldsymbol{\xi}_{\alpha} \omega_{\alpha} &= 0, & (c) \sum_{\alpha} \boldsymbol{\xi}_{\alpha} \boldsymbol{\xi}_{\alpha} \omega_{\alpha} &= c_s^2 I = c_s^2 \delta_{\beta_1 \beta_2} \\
(d) \sum_{\alpha} \boldsymbol{\xi}_{\alpha} \boldsymbol{\xi}_{\alpha} \boldsymbol{\xi}_{\alpha} \omega_{\alpha} &= 0, & (e) \sum_{\alpha} \boldsymbol{\xi}_{\alpha} \boldsymbol{\xi}_{\alpha} \boldsymbol{\xi}_{\alpha} \boldsymbol{\xi}_{\alpha} \omega_{\alpha} &= c_s^4 (\delta_{\beta_1 \beta_2} \delta_{\beta_3 \beta_4} + \delta_{\beta_1 \beta_3} \delta_{\beta_2 \beta_4} + \delta_{\beta_1 \beta_4} \delta_{\beta_2 \beta_3}) \\
(f) \sum_{\alpha} \boldsymbol{\xi}_{\alpha} \boldsymbol{\xi}_{\alpha} \boldsymbol{\xi}_{\alpha} \boldsymbol{\xi}_{\alpha} \boldsymbol{\xi}_{\alpha} \omega_{\alpha} &= 0
\end{aligned} \tag{4.90}$$

On rappelle que pour le modèle $D2Q9$, la fonction de distribution des particules à l'équilibre $f^{eq}(\mathbf{x}, t)$ est donnée par :

$$f_{\alpha}^{eq} = \omega_{\alpha} \rho \left(1 + \frac{(\boldsymbol{\xi}_{\alpha} \cdot \mathbf{u})}{c_s^2} + \frac{(Q_{\alpha} : \mathbf{u} \mathbf{u})}{2c_s^4} \right) \tag{4.91}$$

On a alors :

$$\mathbf{j}^{(0)} = \sum_{\alpha} \boldsymbol{\xi}_{\alpha} f_{\alpha}^{(0)} = \sum_{\alpha} \boldsymbol{\xi}_{\alpha} \left[\omega_{\alpha} \rho \left(1 + \frac{(\boldsymbol{\xi}_{\alpha} \cdot \mathbf{u})}{c_s^2} + \frac{(Q_{\alpha} : \mathbf{u} \mathbf{u})}{2c_s^4} \right) \right] \tag{4.92}$$

On applique les symétries (b), (c) et (d), on obtient :

$$\mathbf{j}^{(0)} = \rho \mathbf{u} \tag{4.93}$$

On a :

$$\boldsymbol{\Pi}^{(0)} = \sum_{\alpha} Q_{\alpha} f_{\alpha}^{(0)} = \sum_{\alpha} Q_{\alpha} \left[\omega_{\alpha} \rho \left(1 + \frac{(\boldsymbol{\xi}_{\alpha} \cdot \mathbf{u})}{c_s^2} + \frac{(Q_{\alpha} : \mathbf{u} \mathbf{u})}{2c_s^4} \right) \right] \tag{4.94}$$

On applique toutes les symétries de l'équation (4.90), on obtient :

$$\boldsymbol{\Pi}^{(0)} = \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \tag{4.95}$$

On a :

$$\nabla_1 \cdot \mathbf{R}^{(0)} = \nabla_1 \cdot \sum_{\alpha} \boldsymbol{\xi}_{\alpha} \boldsymbol{\xi}_{\alpha} \boldsymbol{\xi}_{\alpha} f_{\alpha}^{(0)} = \nabla_1 \cdot \sum_{\alpha} \boldsymbol{\xi}_{\alpha} \boldsymbol{\xi}_{\alpha} \boldsymbol{\xi}_{\alpha} \left[\omega_{\alpha} \rho \left(1 + \frac{(\boldsymbol{\xi}_{\alpha} \cdot \mathbf{u})}{c_s^2} + \frac{(Q_{\alpha} : \mathbf{u} \mathbf{u})}{2c_s^4} \right) \right] \tag{4.96}$$

Avec les conditions de symétries de l'équation (4.90), on obtient :

$$\nabla_1 \cdot \mathbf{R}^{(0)} = c_s^2 \left(\nabla_1 (\rho \mathbf{u}) + \nabla_1 (\rho \mathbf{u})^T + \nabla_1 \cdot (\rho \mathbf{u}) I \right) \tag{4.97}$$

Avec les conditions de symétries, on obtient :

$$\boldsymbol{\Pi}^{(1)} = \sum_{\alpha} Q_{\alpha} f_{\alpha}^{(1)} = \sum_{\alpha} \boldsymbol{\xi}_{\alpha} \boldsymbol{\xi}_{\alpha} f_{\alpha}^{(1)} - c_s^2 I \sum_{\alpha} f_{\alpha}^{(1)} \tag{4.98}$$

On cherche le terme $f_\alpha^{(1)}$:

$$\omega_\alpha = -\frac{1}{\tau} (f_\alpha - f_\alpha^{(0)}) = -\frac{1}{\tau} (\epsilon f_\alpha^{(1)} + \epsilon^2 f_\alpha^{(2)} + O(\epsilon^3)) \quad (4.99)$$

On remplace l'équation (4.73) dans (4.99) :

$$\Omega_\alpha^{(1)} = -\frac{1}{\tau} f_\alpha^{(1)} = (\partial_{t_1} + \nabla_1 \cdot \boldsymbol{\xi}_\alpha) f_\alpha^{(0)} \quad (4.100)$$

$$\begin{aligned} f_\alpha^{(1)} &= -\tau \omega_\alpha (\partial_{t_1} + \nabla_1 \cdot \boldsymbol{\xi}_\alpha) \left(\rho + \frac{(\rho \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\xi}_\alpha)}{c_s^2} + \frac{(Q_\alpha : \rho \mathbf{u} \mathbf{u})}{2c_s^4} \right) \\ &= -\frac{\tau \omega_\alpha}{c_s^2} \left(Q_\alpha : \rho (\nabla_1 \mathbf{u}) - \boldsymbol{\xi}_\alpha \nabla_1 : \rho \mathbf{u} \mathbf{u} + \frac{1}{2c_s^2} (\boldsymbol{\xi}_\alpha \cdot \nabla_1) (Q_\alpha : \rho \mathbf{u} \mathbf{u}) \right) \end{aligned} \quad (4.101)$$

On remplace l'équation (4.100) dans (4.98) :

$$\Pi^{(1)} = -\tau \rho c_s^2 \left((\nabla_1 \mathbf{u}) + (\nabla_1 \mathbf{u})^T \right) \quad (4.102)$$

On remplace $\mathbf{j}^{(0)}$, $\boldsymbol{\Pi}^{(0)}$, $\boldsymbol{\Pi}^{(1)}$ et $\mathbf{R}^{(0)}$ dans l'équation (4.89) :

$$\begin{aligned} \partial_t(\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot \left(\rho \mathbf{u} \mathbf{u} - \tau \rho c_s^2 \left((\nabla_1 \mathbf{u}) + (\nabla_1 \mathbf{u})^T \right) + c_s^2 \rho I + \frac{c_s^2}{2} \partial_t \rho I - \frac{c_s^2}{2} ((\nabla_1 \rho) \mathbf{u} + \mathbf{u} (\nabla_1 \rho)) \right. \\ \left. + \frac{c_s^2}{2} \left((\nabla_1 \cdot (\rho \mathbf{u})) I + (\nabla_1 \rho \mathbf{u}) + (\nabla_1 \rho \mathbf{u})^T \right) \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.103)$$

On met $c_s^2 \rho = p$ et $\nabla_1 = \nabla$, on obtient :

$$\partial_t(\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot \left(\rho \mathbf{u} \mathbf{u} + p I - \rho c_s^2 \left(\tau - \frac{1}{2} \right) \left((\nabla \mathbf{u}) + (\nabla \mathbf{u})^T \right) \right) = 0 \quad (4.104)$$

La viscosité cinématique du fluide est donnée par :

$$\nu = c_s^2 \left(\tau - \frac{1}{2} \right) \quad (4.105)$$

On remplace l'équation (4.104) dans (4.103), on obtient finalement l'équation de conservation de quantité de mouvement :

$$\rho (\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) = -\nabla p + \rho \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (4.106)$$

ANNEXE D

Obtention de la fonction de distribution à l'équilibre $f_{\alpha}^{eq}(\mathbf{x}, t)$ pour le modèle D2Q9

La fonction d'équilibre est un élément clef dans la méthode LBM, elle constitue un moyen de déduire un état mésoscopique associé à un état macroscopique. Cette fonction d'équilibre est obtenue par des approximations de vitesse avec un faible nombre de Mach.

La fonction de distribution de Boltzmann-Maxwell est donnée par [9] :

$$g = \frac{\rho}{(2\pi\theta)^{D/2}} \exp\left(-\frac{(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u})^2}{2\theta}\right), \quad \theta = RT = c_s^2 \quad (4.107)$$

Où D , R , T , c_s représentent respectivement la dimension d'espace, constante des gaz parfaits, la température, et la vitesse du son. Afin de dériver les équations de Navier-Stokes, le développement limité en série de Taylor de la fonction d'équilibre au second degré en \mathbf{u} est suffisant [93].

L'équation (4.107) devient :

$$g = \frac{\rho}{(2\pi RT)^{D/2}} \exp\left(\frac{-\boldsymbol{\xi}^2 + 2(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{u}) - \mathbf{u}^2}{2RT}\right) = \frac{\rho}{(2\pi RT)^{D/2}} \exp\left(\frac{-\boldsymbol{\xi}^2}{2RT}\right) \exp\left(\frac{\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{u}}{RT} - \frac{\mathbf{u}^2}{2RT}\right) \quad (4.108)$$

On a le développement limité en série de Taylor en \mathbf{u} :

$$\exp\left(\frac{\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{u}}{RT} - \frac{\mathbf{u}^2}{2RT}\right) = 1 + \frac{1}{1!} \left(\frac{\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{u}}{RT} - \frac{\mathbf{u}^2}{2RT}\right) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{u}}{RT} - \frac{\mathbf{u}^2}{2RT}\right)^2 + O(\mathbf{u}^3) \quad (4.109)$$

Pour une vitesse u très faible on obtient la fonction à l'équilibre suivante :

$$f^{eq} = \frac{\rho}{(2\pi RT)^{D/2}} \exp(-\boldsymbol{\xi}^2/2RT) \left(1 + \frac{(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{u})}{RT} + \frac{(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{u})^2}{2(RT)^2} - \frac{\mathbf{u}^2}{2RT}\right) \quad (4.110)$$

Le calcul des moments hydrodynamiques de l'équation (4.110), revient à calculer l'intégrale

suivante :

$$I = \int \psi(\boldsymbol{\xi}) f^{eq} d\boldsymbol{\xi} = \frac{\rho}{(2\pi RT)^{D/2}} \int \psi(\boldsymbol{\xi}) \exp\left(-\frac{\boldsymbol{\xi}^2}{2RT}\right) \left(1 + \frac{(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{u})}{RT} + \frac{(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{u})^2}{2(RT)^2} - \frac{\mathbf{u}^2}{2RT}\right) d\boldsymbol{\xi} \quad (4.111)$$

Pour le calcul de la fonction d'équilibre dans le cas de D2Q9, les coordonnées cartésiennes sont utilisées. Une base de polynôme de Hermite est utilisée :

$$\psi_{m,n}(\boldsymbol{\xi}) = \xi_x^m \xi_y^n \quad (4.112)$$

Où ξ_x et ξ_y , sont les coordonnées de $\boldsymbol{\xi}$ suivant les deux axes x et y .

$$I_{mn} = \int \psi_{mn}(\boldsymbol{\xi}) f^{eq} d\boldsymbol{\xi} = \frac{\rho}{(2\pi RT)^{D/2}} \int \xi_x^m \xi_y^n \cdot \exp\left(-\frac{\boldsymbol{\xi}^2}{2RT}\right) \left(1 + \frac{(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{u})}{RT} + \frac{(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{u})^2}{2(RT)^2} - \frac{\mathbf{u}^2}{2RT}\right) d\xi_x d\xi_y \quad (4.113)$$

$$\zeta = \xi / \sqrt{2RT} \Rightarrow \xi = \zeta \sqrt{2RT} \Rightarrow d\xi_x d\xi_y = 2RT d\zeta_x d\zeta_y \quad (4.114)$$

Si on résout un cas bidimensionnel ($D = 2$) :

$$I_{mn} = \frac{\rho}{2\pi RT} 2RT \int e^{-\zeta^2} \zeta_x^m (\sqrt{2RT})^m \zeta_y^n (\sqrt{2RT})^n \left(1 + \frac{(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{u})}{RT} + \frac{(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{u})^2}{2(RT)^2} - \frac{\mathbf{u}^2}{2RT}\right) d\zeta_x d\zeta_y \quad (4.115)$$

Pour simplifier le calcul de l'intégrale I_{mn} , on pose :

$$I_i = \int e^{-\zeta^2} \zeta^i d\zeta \quad (4.116)$$

On remplace l'équation (4.116) dans (4.115) on obtient :

$$I_{mn} = \frac{\rho}{\pi} (\sqrt{2RT})^{m+n} \left[I_m I_n \left(1 - \frac{\mathbf{u}^2}{2RT}\right) + \left(\frac{2(u_x I_{m+1} I_n + u_y I_m I_{n+1})}{\sqrt{2RT}}\right) + \left(\frac{(u_x^2 I_{m+2} I_n + 2u_x u_y I_{m+1} I_{n+1} + u_y^2 I_m I_{n+2})}{RT}\right) \right] \quad (4.117)$$

L'approximation numérique de l'intégrale I_m se fait par la quadrature d'Hermite à l'ordre 3, ce qui permet d'écrire :

$$I_m = \sum_{j=1}^3 \omega_j \zeta_j^m \quad (4.118)$$

Les abscisses de cette quadrature sont données :

$$\zeta_1 = -\sqrt{3/2}, \quad \zeta_2 = 0, \quad \zeta_3 = +\sqrt{3/2} \quad (4.119)$$

Les poids correspondants :

$$\omega_1 = \sqrt{\pi}/6, \quad \omega_2 = 2\sqrt{\pi}/3, \quad \omega_3 = \sqrt{\pi}/6 \quad (4.120)$$

On simplifie les termes qui composent l'équation (4.117) :

Premier terme :

$$(\sqrt{2RT})^{m+n} I_m I_n \left(1 - \frac{\mathbf{u}^2}{2RT}\right) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \omega_i \omega_j \psi(\xi_i, \xi_j) \left(1 - \frac{\mathbf{u}^2}{2RT}\right) \quad (4.121)$$

Deuxième terme :

$$(\sqrt{2RT})^{m+n} \left(\frac{2(uI_{m+1}I_n + vI_mI_{n+1})}{\sqrt{2RT}} \right) = \frac{1}{RT} \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \omega_i \omega_j \psi(\xi_i, \xi_j) \mathbf{u} \xi_{i,j} \right) \quad (4.122)$$

Troisième terme :

$$\frac{(\sqrt{2RT})^{m+n}}{RT} \left(u^2 I_{m+2} I_n + 2uv I_{m+1} I_{n+1} + v^2 I_m I_{n+2} \right) = \frac{1}{2(RT)^2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \omega_i \omega_j \psi(\xi_i, \xi_j) (\xi_{i,j} \mathbf{u})^2 \quad (4.123)$$

On remplace l'ensemble des termes développés dans l'équation (4.117), on obtient :

$$I_{mn} = \frac{\rho}{\pi} \sum_{i,j=1}^3 \omega_i \omega_j \psi(\xi_i, \xi_j) \left(1 + \frac{\xi_{i,j}}{RT} + \frac{\xi_{i,j}^2}{2(RT)^2} - \frac{\mathbf{u}^2}{RT} \right) \quad (4.124)$$

à partir de cette équation (4.124), on peut donc identifier la fonction de distribution à l'équilibre donnée par :

$$f_{i,j}^{eq} = \frac{\omega_i \omega_j}{\pi} \rho \left(1 + \frac{\xi_{i,j}}{RT} + \frac{\xi_{i,j}^2}{2(RT)^2} - \frac{\mathbf{u}^2}{RT} \right) \quad (4.125)$$

On utilise les notations suivantes :

$$\xi_\alpha = \begin{cases} (0, 0) & \alpha = 0 \\ (\cos\theta_\alpha, \sin\theta_\alpha)c, & \theta_\alpha = (\alpha - 1)\pi/2, \quad \alpha = 1, 2, 3, 4 \\ \sqrt{2}(\cos\theta_\alpha, \sin\theta_\alpha)c, & \theta_\alpha = (\alpha - 5)\pi/2 + \pi/4, \quad \alpha = 5, 6, 7, 8 \end{cases} \quad (4.126)$$

$$\omega_\alpha = \frac{\omega_i \omega_j}{\pi} = \begin{cases} 4/9 & i = 1, j = 2, \quad \alpha = 0 \\ 1/9 & i = 1, j = 2, \dots, \quad \alpha = 1, 2, 3, 4 \\ 1/36 & i = 1, j = 1, \dots, \quad \alpha = 5, 6, 7, 8 \end{cases} \quad (4.127)$$

$$RT = c_s^2 = c^2/3 \Rightarrow c = \sqrt{3RT} \quad (4.128)$$

On obtient finalement la fonction d'équilibre pour le modèle D2Q9 :

$$f_\alpha^{eq} = w_\alpha \rho \left(1 + \frac{3(\boldsymbol{\xi}_\alpha \cdot \boldsymbol{u})}{c^2} + \frac{3(\boldsymbol{\xi}_\alpha \cdot \boldsymbol{u})^2}{2c^4} - \frac{3u^2}{2c^2} \right) \quad (4.129)$$

Bibliographie

- [1] J. H. FERZIGER et M. PERIC, *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Berlin : Springer, 1999.
- [2] H. K. VERSTEEG et W. MALALASEKERA, *An Introduction to Computational Fluid Dynamics. The Finite Volume Method*. London : Longman Group Ltd., 1995.
- [3] S. CHEN. et G. D. DOOLEN, « Lattice Boltzmann Method for Fluid Flows », *Annual Review of Fluid Mechanics*, vol. 30, no. 1, p. 329–364, 1998.
- [4] S. SUCCI, *The lattice Boltzmann equation : for Fluid Dynamics and Beyond*. Oxford university press, 2001.
- [5] D. YU, R. MEI, L.-S. LUO et W. SHYY, « Viscous flow computations with the method of lattice Boltzmann equation », *Progress in Aerospace Sciences*, vol. 39, p. 329–367, juil. 2003.
- [6] C. K. AIDUN et J. R. CLAUSEN, « Lattice-Boltzmann Method for Complex Flows », *Annual Review of Fluid Mechanics*, vol. 42, no. 1, p. 439–472, 2010.
- [7] E. ARQUIS et J. CALTAGIRONE, « Sur les conditions hydrodynamiques au voisinage d’une interface milieu fluide - milieu poreux : application à la convection naturelle. », *C. R. Acad. Sci. Paris*, vol. 299, p. 1–4, 1984.
- [8] P. ANGOT, C.-H. BRUNEAU et P. FABRIE, « A penalization method to take into account obstacles in incompressible viscous flows », *Numerische Mathematik*, vol. 81, p. 497–520, fév. 1999.
- [9] A. D. WOLF-GLADROW, *Lattice-gas cellular automata and lattice mann models : An Introduction*. No. 1725 de A, Springer Science & Business Media, 2000.
- [10] P. L. BHATNAGAR, E. P. GROSS et M. KROOK, « A Model for Collision Processes in Gases. I. Small Amplitude Processes in Charged and Neutral One-Component Systems », *Physical Review*, vol. 94, p. 511–525, mai 1954.
- [11] P. J. DELLAR, « An interpretation and derivation of the lattice boltzmann method using strang splitting », *Computers and Mathematics with Applications*, vol. 65, p. 129–141, 2013.
- [12] A. A. MOHAMAD, *Lattice Boltzmann Method : Fundamentals and Engineering Applications with Computer Codes*. Springer Science & Business Media, 2011.
- [13] C. M. SUKOP et T. J. D. THORNE, *Lattice Boltzmann Modeling : An Introduction for Geoscientists and Engineers*. Springer Publishing Company, Incorporated, 1 éd., 2007.
- [14] J. C. G. VERSCHAEVE et B. MÜLLER, « A curved no-slip boundary condition for the lattice Boltzmann method », *Journal of Computational Physics*, vol. 229, p. 6781–6803, sept. 2010.
- [15] D. P. ZIEGLER, « Boundary conditions for lattice Boltzmann simulations », *Journal of Statistical Physics*, vol. 71, p. 1171–1177, juin 1993.
- [16] P. LALLEMAND et L.-S. LUO, « Lattice Boltzmann method for moving boundaries », *Journal of Computational Physics*, vol. 184, p. 406–421, jan. 2003.
- [17] L. ZHANG, Z. ZENG, H. XIE, X. TAO, Y. ZHANG, Y. LU, A. YOSHIKAWA et Y. KAWAZOE, « An alternative second order scheme for curved boundary condition in lattice Boltzmann method », *Computers & Fluids*, vol. 114, p. 193–202, juil. 2015.

- [18] I. GINZBOURG et D. D'HUMIÈRES, « Local second-order boundary methods for lattice Boltzmann models », *Journal of Statistical Physics*, vol. 84, p. 927–971, sept. 1996.
- [19] X. YIN et J. ZHANG, « An improved bounce-back scheme for complex boundary conditions in lattice Boltzmann method », *Journal of Computational Physics*, vol. 231, p. 4295–4303, juin 2012.
- [20] C. HO, C. CHANG et K. LIN, « Consistent boundary conditions for 2d and 3d lattice Boltzmann simulations », *CMES : Computer Modeling in Engineering & Sciences*, vol. 44, no. 2, p. 137–155, 2009.
- [21] A. J. C. LADD, « Numerical simulations of particulate suspensions via a discretized Boltzmann equation. Part 2. Numerical results », *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 271, p. 311–339, juil. 1994.
- [22] A. J. C. LADD, « Numerical simulations of particulate suspensions via a discretized Boltzmann equation. Part 1. Theoretical foundation », *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 271, p. 285–309, juil. 1994.
- [23] Q. ZOU et X. HE, « On pressure and velocity boundary conditions for the lattice Boltzmann BGK model », *Physics of Fluids (1994-present)*, vol. 9, p. 1591–1598, juin 1997.
- [24] S. CHEN, D. MARTÍNEZ et R. MEI, « On boundary conditions in lattice Boltzmann methods », *Physics of Fluids (1994-present)*, vol. 8, p. 2527–2536, sept. 1996.
- [25] D. YU, R. MEI et W. SHYY, « A multi-block lattice Boltzmann method for viscous fluid flows », *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 39, p. 99–120, mai 2002.
- [26] D. LAGRAVA, O. MALASPINAS, J. LATT et B. CHOPARD, « Advances in multi-domain lattice Boltzmann grid refinement », *Journal of Computational Physics*, vol. 231, p. 4808–4822, mai 2012.
- [27] C.-L. LIN et Y. G. LAI, « Lattice Boltzmann method on composite grids », *Physical Review E*, vol. 62, p. 2219–2225, août 2000.
- [28] O. FILIPPOVA et D. HÄNEL, « Grid refinement for lattice-BGK models », *Journal of Computational Physics*, vol. 147, p. 219–228, nov. 1998.
- [29] A. DUPUIS et B. CHOPARD, « Theory and applications of an alternative lattice Boltzmann grid refinement algorithm », *Physical Review E*, vol. 67, p. 066707, juin 2003.
- [30] U. GHIA, K. N. GHIA et C. T. SHIN, « High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method », *Journal of Computational Physics*, vol. 48, p. 387–411, déc. 1982.
- [31] A. J. C. LADD et R. VERBERG, « Lattice-Boltzmann simulations of particle-fluid suspensions », *Journal of Statistical Physics*, vol. 104, p. 1191–1251, sept. 2001.
- [32] M. BOUZIDI, M. FIRDAOUSS et P. LALLEMAND, « Momentum transfer of a Boltzmann-lattice fluid with boundaries », *Physics of Fluids*, vol. 13, p. 3452–3459, nov. 2001.
- [33] D. NOBLE et J. TORCZYNSKI, « A lattice-boltzmann method for partially saturated computational cells », *International Journal of Modern Physics C*, vol. 9, no. 8, p. 1189–1201, 1998.
- [34] A. J. C. LADD, « Numerical simulations of particulate suspensions via a discretized Boltzmann equation. Part 1. Theoretical foundation », *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 271, p. 285–309, juil. 1994.
- [35] R. MEI, L.-S. LUO et W. SHYY, « An accurate curved boundary treatment in the Lattice Boltzmann Method », *Journal of Computational Physics*, vol. 155, p. 307–330, nov. 1999.
- [36] R. MEI, D. YU, W. SHYY et L.-S. LUO, « Force evaluation in the lattice Boltzmann method involving curved geometry », *Physical Review E*, vol. 65, p. 041203, avril 2002.

- [37] P. H. KAO et R. J. YANG, « An investigation into curved and moving boundary treatments in the lattice Boltzmann method », *Journal of Computational Physics*, vol. 227, p. 5671–5690, mai 2008.
- [38] A. GRUCELSKI et J. POZORSKI, « Lattice boltzmann simulations of flow past a circular cylinder and in simple porous media », *Computers and Fluids*, vol. 71, p. 406–416, 2013.
- [39] C. S. PESKIN, « Flow patterns around heart valves : A numerical method », *Journal of Computational Physics*, vol. 10, p. 252–271, oct. 1972.
- [40] C. S. PESKIN, « Numerical analysis of blood flow in the heart », *Journal of Computational Physics*, vol. 25, p. 220–252, nov. 1977.
- [41] C. S. PESKIN, « The immersed boundary method », *Acta Numerica*, vol. 11, p. 479–517, jan. 2002.
- [42] M.-C. LAI et C. S. PESKIN, « An immersed boundary method with formal second-order accuracy and reduced numerical viscosity », *Journal of Computational Physics*, vol. 160, p. 705–719, mai 2000.
- [43] A. PINELLI, I. NAQAVI, U. PIOMELLI et J. FAVIER, « Immersed-boundary methods for general finite-difference and finite-volume navier-stokes solvers », *J. Comput. Phys.*, vol. 229, p. 9073–9091, 2010.
- [44] A. M. ROMA, C. S. PESKIN et M. J. BERGER, « An adaptive version of the Immersed Boundary Method », *Journal of Computational Physics*, vol. 153, p. 509–534, août 1999.
- [45] Z. FENG et E. MICHAELIDES, « The immersed boundary lattice boltzmann method for solving fluid-particles interaction problems », *J. Comput. Phys.*, vol. 195, p. 602–628, 2004.
- [46] N. A. PATANKAR, P. SINGH, D. D. JOSEPH, R. GLOWINSKI et T. W. PAN, « A new formulation of the distributed Lagrange multiplier/fictitious domain method for particulate flows », *International Journal of Multiphase Flow*, vol. 26, p. 1509–1524, sept. 2000.
- [47] J. MOHD-YUSOF, « Combined Immersed-Boundary/B-spline methods for simulations of flow in complex geometries », annual research briefs, Center for Turbulence Research, 1997.
- [48] E. A. FADLUN, R. VERZICCO, Y. P. ORL et J. MOHD-YUSOF, « Combined immersed-boundary finitedifference methods for three-dimensional complex flow simulations », *Journal of Computational Physics*, p. 35–60, 2000.
- [49] A. DUPUIS, P. CHATELAIN et P. KOUMOUTSAKOS, « An immersed boundary–lattice-boltzmann method for the simulation of the flow past an impulsively started cylinder », *Journal of Computational Physics*, vol. 227, p. 4486–4498, avril 2008.
- [50] M. UHLMANN, « An immersed boundary method with direct forcing for the simulation of particulate flows », *J. Comput. Phys.*, vol. 209, p. 448–476, 2005.
- [51] Z. GUO, C. ZHENG et B. SHI, « Discrete lattice effects on the forcing term in the lattice boltzmann method », *Physical Review E*, vol. 65, p. 1–6, avril 2002.
- [52] Y. LI, R. SHOCK, R. ZHANG et H. CHEN, « Numerical study of flow past an impulsively started cylinder by the lattice-boltzmann method », *J. Fluid. Mech.*, vol. 519, p. 273–300, 2004.
- [53] Z.-G. FENG et E. E. MICHAELIDES, « Proteus : a direct forcing method in the simulations of particulate flows », *Journal of Computational Physics*, vol. 202, p. 20–51, jan. 2005.
- [54] Y. PENG, C. SHU, Y. T. CHEW, X. D. NIU et X. Y. LU, « Application of multi-block approach in the immersed boundary–lattice Boltzmann method for viscous fluid flows », *Journal of Computational Physics*, vol. 218, p. 460–478, nov. 2006.
- [55] X. D. NIU, C. SHU, Y. T. CHEW et Y. PENG, « A momentum exchange-based immersed boundary-lattice Boltzmann method for simulating incompressible viscous flows », *Physics Letters A*, vol. 354, p. 173–182, mai 2006.

- [56] D. D'HUMIÈRES, I. GINZBURG, M. KRAFCZYK, P. LALLEMAND et L. LUO, « Multiple-relaxation-time lattice boltzmann models in three dimensions », *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, vol. 360, p. 437–451, 2002.
- [57] J. WU et C. SHU, « Implicit velocity correction-based immersed boundary-lattice Boltzmann method and its applications », *Journal of Computational Physics*, vol. 228, p. 1963–1979, avril 2009.
- [58] J. WU, Y. QIU, C. SHU et N. ZHAO, « Pitching-motion-activated flapping foil near solid walls for power extraction : a numerical investigation », *Phys. Fluids*, vol. 26, 2014.
- [59] X. SHI et N. PHAN-THIEN, « Distributed Lagrange multiplier/fictitious domain method in the framework of lattice Boltzmann method for fluid–structure interactions », *Journal of Computational Physics*, vol. 206, p. 81–94, juin 2005.
- [60] Z. YU, « A DLM/FD method for fluid/flexible-body interactions », *Journal of Computational Physics*, vol. 207, p. 1–27, juil. 2005.
- [61] R. GLOWINSKI, T. W. PAN, T. I. HESLA et D. D. JOSEPH, « A distributed Lagrange multiplier/fictitious domain method for particulate flows », *International Journal of Multiphase Flow*, vol. 25, p. 755–794, août 1999.
- [62] J. DONEA, A. HUERTA, J.-P. PONTHOT et A. RODRÍGUEZ-FERRAN, « Arbitrary Lagrangian–Eulerian Methods », in *Encyclopedia of Computational Mechanics*, John Wiley & Sons, Ltd, 2004.
- [63] M. MELDI, E. VERGNAULT et P. SAGAUT, « An arbitrary Lagrangian–Eulerian approach for the simulation of immersed moving solids with Lattice Boltzmann Method », *Journal of Computational Physics*, vol. 235, p. 182–198, fév. 2013.
- [64] T. J. R. HUGHES, W. K. LIU et T. K. ZIMMERMANN, « Lagrangian-Eulerian finite element formulation for incompressible viscous flows », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 29, p. 329–349, déc. 1981.
- [65] M. SOULI et J. ZOLESIO, « Arbitrary lagrangian-eulerian and free surface methods in fluid mechanics », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 191, p. 451–466, 2001.
- [66] P. ANGOT, *Contribution à l'étude des transferts thermiques dans des systèmes complexes aux composants électroniques*. Thèse de doctorat, Université de Bordeaux I, 1989.
- [67] K. KHADRA, P. ANGOT, S. PARNEIX et J. CALTAGIRONE, « Fictitious domain approach for numerical modelling of navier-stokes equations », *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 34, p. 651–684, 2000.
- [68] M. COQUERELLE et G. COTTET, « A vortex level set method for the two-way coupling of an incompressible fluid with colliding rigid bodies », *Journal of Computational Physics*, vol. 227, p. 9121–9137, 2008.
- [69] T. ENGELS, D. KOLOMENSKIY, K. SCHNEIDER et J. SESTERHENN, « Two-dimensional simulation of the fluttering instability using a pseudospectral method with volume penalization », *Computers & Structures*, vol. 122, p. 101–112, juin 2013.
- [70] B. KADOCH, D. KOLOMENSKIY, P. ANGOT et K. SCHNEIDER, « A volume penalization method for incompressible flows and scalar advection–diffusion with moving obstacles », *Journal of Computational Physics*, vol. 231, p. 4365–4383, juin 2012.
- [71] B. SHI et Z. GUO, « Lattice Boltzmann simulation of some nonlinear convection–diffusion equations », *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 61, p. 3443–3452, juin 2011.
- [72] B. SHI et Z. GUO, « Lattice boltzmann model for nonlinear convection-diffusion equations », *Phys. Rev. E*, vol. 79, p. 016701, Jan 2009.
- [73] Y. XIAO-MEI et S. BAO-CHANG, « A lattice Bhatnagar–Gross–Krook model for a class of the generalized Burgers equations », *Chinese Physics*, vol. 15, p. 1441–1449, juil. 2006.

-
- [74] M. BENAOUICHA, *Contribution au développement d'algorithmes de couplage en interaction fluide-structure*. Thèse de doctorat, Université La Rochelle, 2007.
 - [75] S. PIPERNO, *Simulation numérique d'interaction fluide-structure*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, June 1995.
 - [76] C. FARHAT, M. LESOINNE et N. MAMAN, « Mixed explicit/implicit time integration of coupled aeroelastic problems : Three-field formulation, geometric conservation and distributed solution », *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 21, p. 807–835, nov. 1995.
 - [77] L.-S. LUO, *Lattice-Gas Automata and Lattice Boltzmann Equations for two-dimensional hydrodynamics*. Phd. thesis, Georgia Institute of Technology, 1993.
 - [78] X. SHAN et H. CHEN, « Simulation of nonideal gases and liquid-gas phase transitions by the lattice Boltzmann equation », *Physical Review E*, vol. 49, p. 2941–2948, avril 1994.
 - [79] J. M. BUICK et C. A. GREATER, « Gravity in a lattice Boltzmann model », *Physical Review E*, vol. 61, p. 5307–5320, mai 2000.
 - [80] Z. GUO et T. S. ZHAO, « Lattice Boltzmann model for incompressible flows through porous media », *Phys. Rev. E*, vol. 66, 2002.
 - [81] A. MUKHOPADHYAY, G. BISWAS et T. SUNDARARAJAN, « Numerical investigation of confined wakes behind a square cylinder in a channel », *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 14, p. 1473–1484, juin 1992.
 - [82] M. BREUER, J. BERNSDORF, T. ZEISER et F. DURST, « Accurate computations of the laminar flow past a square cylinder based on two different methods : lattice-Boltzmann and finite-volume », *International Journal of Heat and Fluid Flow*, vol. 21, p. 186–196, avril 2000.
 - [83] H. ZHOU, G. MO, F. WU, J. ZHAO, M. RUI et K. CEN, « GPU implementation of lattice boltzmann method for flows with curved boundaries », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 225–228, p. 65–73, juin 2012.
 - [84] X. HE et G. D. DOOLEN, « Lattice Boltzmann method on a curvilinear coordinate system : Vortex shedding behind a circular cylinder », *Physical Review E*, vol. 56, p. 434–440, juil. 1997.
 - [85] D. J. TRITTON, « Experiments on the flow past a circular cylinder at low Reynolds numbers », *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 6, p. 547–567, nov. 1959.
 - [86] C. H. K. WILLIAMSON, « Vortex dynamics in the cylinder wake », *Annual Review of Fluid Mechanics*, vol. 28, no. 1, p. 477–539, 1996.
 - [87] F. ARCHAMBEAU, N. MÉCHITOUA et M. SAKIZ, « Code_saturne : a finite volume code for the computation of turbulent incompressible flows », *International Journal on Finite Volumes*, vol. 1, 2004.
 - [88] D. SHIELS, A. LEONARD et A. ROSHKO, « Flow-induced vibration of a circular cylinder at limiting structural parameters », *Journal of Fluids and Structures*, vol. 15, no. 1, p. 3–21, 2001.
 - [89] J. LU, H. HAN, B. SHI et Z. GUO, « Immersed boundary lattice Boltzmann model based on multiple relaxation times », *Physical Review E*, vol. 85, p. 016711, jan. 2012.
 - [90] S. FARNOUSH et M. T. MANZARI, « Comparison of boundary slip for two variants of immersed boundary method in lattice Boltzmann framework », *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 404, p. 200–216, juin 2014.
 - [91] D. D'HUMIERES, « Generalized lattice-boltzmann equations », In : *Shizgal BD, Weaver DP, editors. Rarefied Gas Dynamics : Theory and Simulations, Prog Astronaut Aeronaut*, p. 159 : 450–458, 1992.

- [92] B. CHOPARD. et D. MICHEL, *Cellular automata modeling of physical systems*. Collection Ala-Saclay, Cambridge, England, New York : Cambridge University Press, 1998.
- [93] X. HE et L.-S. LUO, « Theory of the lattice Boltzmann method : From the Boltzmann equation to the lattice Boltzmann equation », *Physical Review E*, vol. 56, p. 6811–6817, déc. 1997.